MATEMÁTICAS

TERCERA EDICIÓN

CÁLCULO DIFERENCIAL

SAMUEL FUENLABRADA

INCLUYE

Cálculo diferencial

Tercera edición

Samuel Fuenlabrada de la Vega Trucíos
Instituto Politécnico Nacional

Revisores técnicos

Irma Fuenlabrada Velázquez
Departamento de Investigaciones Educativas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Instituto Politécnico Nacional

Bertha Vivanco Ocampo
Departamento de Investigaciones Educativas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Instituto Politécnico Nacional

Ing. Joel Juárez Betancourt
Universidad Autónoma Metropolitana

McGraw Hill

México • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Guatemala • Lisboa • Madrid • Nueva York •
San Juan • Santiago • Auckland • Londres • Milán • Montreal • Nueva Delhi • San Francisco •
Singapur • St. Louis • Sydney • Toronto

Publisher de la división escolar: Jorge Rodríguez Hernández

Director editorial: Ricardo Martín del Campo

Editora de desarrollo: Talía Delgadillo Santoyo

Supervisora de producción: Jacqueline Brieño Álvarez

Diseño de portada e interiores: Código X, S. C.

Formación tipográfica: Overprint, S. A. de C. V.

Cálculo diferencial

Tercera edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

McGraw-Hill Interamericana

DERECHOS RESERVADOS © 2008, respecto a la tercera edición por:

McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES S. A. DE C. V.

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015
Torre A, piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-970-10-6176-3
ISBN-10: 970-10-6176-4
ISBN: 970-10-4707-9 (Segunda edición)

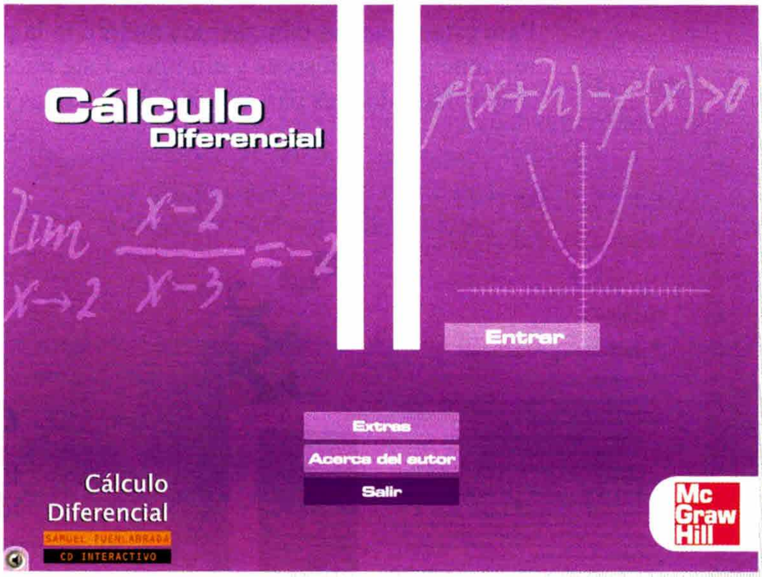
234567890 0965432108

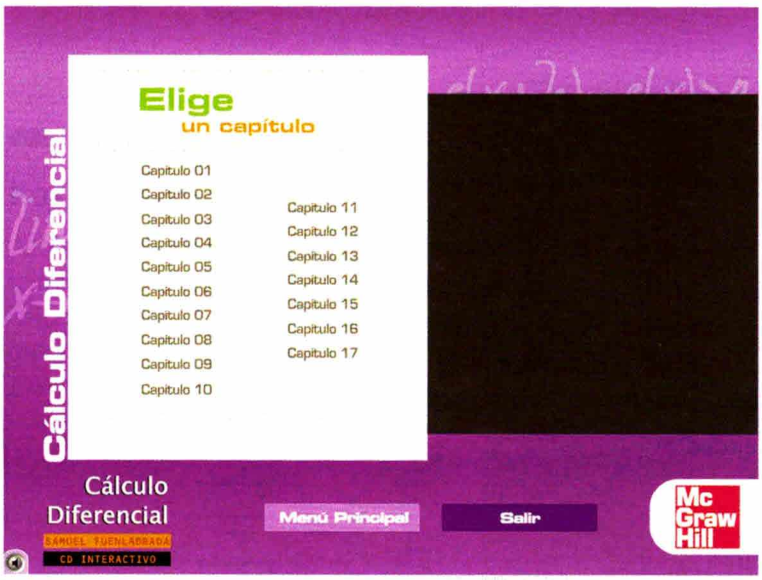
Impreso en China Printed in China

Conoce tu CD

Uno de los valores agregados de esta nueva edición es el CD que acompaña a tu libro de texto. En este disco podrás encontrar evaluaciones, ejercicios adicionales, formularios y glosarios.

Te recomendamos revisar el apartado de *Extras*, en donde podrás leer artículos de interés relacionados con tu futuro profesional y la práctica de las matemáticas.





Todos estos recursos harán que el aprendizaje de la disciplina sea más dinámico y atractivo.

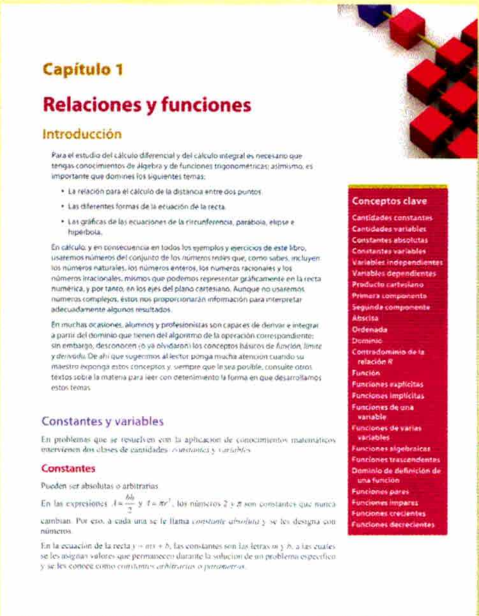
No necesitas tener instalado ningún programa en particular porque el software es autoejecutable y eres tú el que decide qué capítulos revisar y sobre todo, qué actividades realizar.

Toda la información está catalogada por capítulos y tienes la opción de imprimir tus evaluaciones, formularios y tablas para que puedas consultar con tu profesor cualquier duda.

Conoce tu libro

Organización

Para esta nueva edición, hemos mejorado la presentación de los temas para mejor referencia de profesores y alumnos. Este nuevo formato te permitirá ubicar con mayor facilidad las partes y secciones en las que se divide tu libro.



Capítulo 1

Relaciones y funciones

Introducción

Para el estudio del cálculo diferencial y del cálculo integral es necesario que tengas conocimientos de álgebra y de funciones trigonométricas; asimismo, es importante que domines los siguientes temas:

- La relación para el cálculo de la distancia entre dos puntos.
- Las diferentes formas de la ecuación de la recta.
- Las gráficas de las ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

En cálculo, y en consecuencia en todos los ejemplos y ejercicios de este libro, usaremos números del conjunto de los *números reales* que, como sabes, incluyen los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números irracionales, mismos que podemos representar gráficamente en la recta numérica, y por tanto, en los ejes del plano cartesiano. Aunque no usaremos números complejos, éstos nos proporcionarán información para interpretar adecuadamente algunos resultados.

En muchas ocasiones, alumnos y profesionistas son capaces de derivar e integrar a partir del dominio que tienen del algoritmo de la operación correspondiente; sin embargo, desconocen (o ya olvidaron) los conceptos básicos de *función, límite* y *derivada*. De ahí que sugerimos al lector ponga mucha atención cuando su maestro exponga estos conceptos y, siempre que le sea posible, consulte otros textos sobre la materia para leer con detenimiento la forma en que desarrollamos estos temas.

Constantes y variables

En problemas que se resuelven con la aplicación de conocimientos matemáticos intervienen dos clases de cantidades: *constantes* y *variables*.

Constantes

Pueden ser absolutas o arbitrarias.

En las expresiones $A = \frac{bh}{2}$ y $A = \pi r^2$, los números 2 y π son constantes que nunca cambian. Por eso, a cada una se le llama *constante absoluta* y se les designa con números.

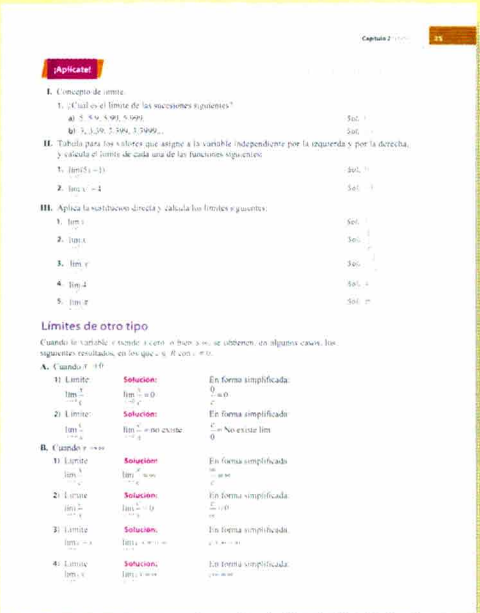
En la ecuación de la recta $y = mx + b$, las constantes son las letras m y b, a las cuales se les asignan valores que permanecen durante la solución de un problema específico y se les conoce como *constantes arbitrarias o parámetros*.

Conceptos clave

Cantidades constantes
Cantidades variables
Constantes absolutas
Constantes variables
Variables independientes
Variables dependientes
Producto cartesiano
Primera componente
Segunda componente
Abscisa
Ordenada
Dominio
Contradominio de la relación R
Función
Funciones explícitas
Funciones implícitas
Funciones de una variable
Funciones de varias variables
Funciones algebraicas
Funciones trascendentes
Dominio de definición de una función
Funciones pares
Funciones impares
Funciones crecientes
Funciones decrecientes

Conceptos clave

En cada entrada de capítulo podrás ubicar los términos más importantes que se analizarán y que es importante memorices para continuar con tu progreso de aprendizaje. Estos términos representan la base que te permitirá adquirir conocimientos más complejos y que además se mencionarán en cursos posteriores.



Capítulo 2 25

¡Aplícate!

I. Concepto de límite.

1. ¿Cuál es el límite de las sucesiones siguientes?

a) 5, 5.9, 5.99, 5.999, Sol.

b) 3, 3.39, 3.399, 3.3999,... Sol.

II. Tabula para los valores que asigne a la variable independiente por la izquierda y por la derecha, y calcula el límite de cada una de las funciones siguientes:

1. lim(5x − 1) Sol.

2. lim x² − 4 Sol.

III. Aplica la sustitución directa y calcula los límites siguientes:

1. lim Sol.
2. lim Sol.
3. lim Sol.
4. lim 4 Sol.
5. lim π Sol. π

Límites de otro tipo

Cuando la variable x tiende a cero, o bien a ∞, se obtienen, en algunos casos, los siguientes resultados, en los que c ∈ R con c ≠ 0.

A. Cuando x → 0

1) Límite: Solución: En forma simplificada:

2) Límite: Solución: lim = no existe En forma simplificada: $\frac{c}{0}$ = No existe lim

B. Cuando x → ∞

1) Límite: Solución: En forma simplificada:

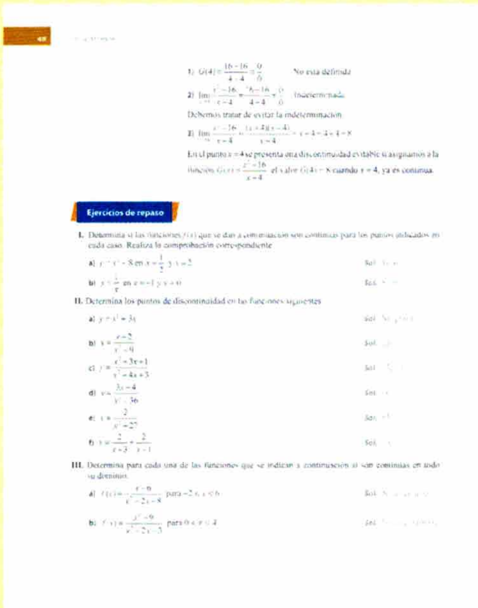
2) Límite: Solución: En forma simplificada:

3) Límite: Solución: En forma simplificada:

4) Límite: Solución: En forma simplificada:

¡Aplícate!

Nueva sección de ejercicios que aparece después de haber estudiado un tema de extensión y complejidad considerable. Si tienes la capacidad de resolver los ejercicios ahí sugeridos, significa que tienes la capacidad para continuar con el resto de los temas del capítulo.



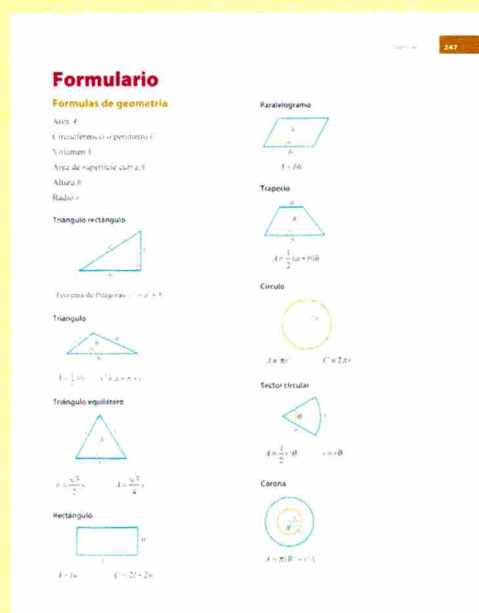
Ejercicios de repaso

Ejercicios de repaso

Con esta sección de ejercicios concluyes el estudio de un capítulo. Los problemas a realizar en este apartado incluyen aplicaciones de todos los temas analizados. Sirve como una herramienta de autoevaluación y guía de estudio.

Formulario

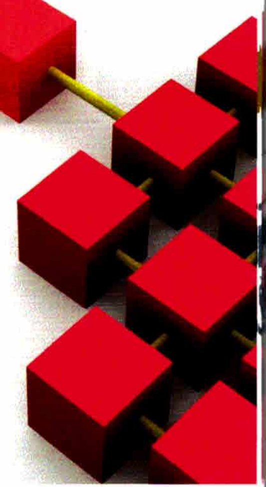
Al final de tu libro encontrarás un formulario que te ayudará a identificar las operaciones básicas de cálculo diferencial. Consúltalo cada vez que tengas que resolver los ejercicios de las secciones *¡Aplícate!* y *Ejercicios de repaso*.



Formulario

Fórmulas de geometría

Contenido



Capítulo 1

Relaciones y funciones

Introducción

Para el estudio del cálculo diferencial y del cálculo integral es necesario que tengas conocimientos de álgebra y de funciones trigonométricas; asimismo, es importante que domines los siguientes temas:

- La relación para el cálculo de la distancia entre dos puntos.
- Las diferentes formas de la ecuación de la recta.
- Las gráficas de las ecuaciones de la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

En cálculo, y en consecuencia en todos los ejemplos y ejercicios de este libro, usaremos números del conjunto de los *números reales* que, como sabes, incluyen los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números irracionales, mismos que podemos representar gráficamente en la recta numérica, y por tanto, en los ejes del plano cartesiano. Aunque no usaremos números complejos, éstos nos proporcionarán información para interpretar adecuadamente algunos resultados.

En muchas ocasiones, alumnos y profesionistas son capaces de derivar e integrar a partir del dominio que tienen del algoritmo de la operación correspondiente; sin embargo, desconocen (o ya olvidaron) los conceptos básicos de *función, límite* y *derivada*. De ahí que sugerimos al lector ponga mucha atención cuando su maestro exponga estos conceptos y, siempre que le sea posible, consulte otros textos sobre la materia para leer con detenimiento la forma en que desarrollamos estos temas.

Conceptos clave

Cantidades constantes
Cantidades variables
Constantes absolutas
Constantes variables
Variables independientes
Variables dependientes
Producto cartesiano
Primera componente
Segunda componente
Abscisa
Ordenada
Dominio
Contradominio de la relación *R*
Función
Funciones explícitas
Funciones implícitas
Funciones de una variable
Funciones de varias variables
Funciones algebraicas
Funciones trascendentes
Dominio de definición de una función
Funciones pares
Funciones impares
Funciones crecientes
Funciones decrecientes

Constantes y variables

En problemas que se resuelven con la aplicación de conocimientos matemáticos intervienen dos clases de cantidades: *constantes* y *variables*.

Constantes

Pueden ser absolutas o arbitrarias.

En las expresiones $A=\dfrac{bh}{2}$ y $A=\pi r^2$, los números 2 y π son constantes que nunca cambian. Por eso, a cada una se le llama *constante absoluta* y se les designa con números.

En la ecuación de la recta $y = mx + b$, las constantes son las letras m y b, a las cuales se les asignan valores que permanecen durante la solución de un problema específico y se les conoce como *constantes arbitrarias* o *parámetros*.

Variables

Pueden ser **independientes** o **dependientes**.

En las expresiones:

$A = \pi r^2$ a las literales A, r se les llaman *variables.*

$3x + 2y + 4$ a las literales x y y se les llaman *variables.*

Si los valores de una variable, por ejemplo de y, dependen de los de otra, por ejemplo de x, y una vez realizadas las operaciones que se indiquen, si a cada valor asignado a x le corresponden uno o más a y, decimos entonces que hay una relación entre x y y.

A la variable x se le llama **variable independiente** y a la variable y se le llama **variable dependiente**.

Relación y función entre las variables

Dada la importancia que tienen los conceptos de relación y función, los analizaremos utilizando algunos conocimientos elementales sobre conjuntos.

Los conceptos de *relación* y *función* implican una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que forman *parejas ordenadas.*

Cuando se formula una expresión que liga a dos o más objetos entre sí, postulamos una relación aunque no necesariamente matemática; por ejemplo, analiza las siguientes oraciones:

- Juan "es amigo de" Pedro.
- Laura "es novia de" Manuel.
- Samuel "es papá de" Irma.

Estos conceptos indican relaciones entre elementos de conjuntos; en los ejemplos, de conjuntos de personas. Las parejas ordenadas que se forman son:

- Juan "es amigo de" Pedro. (Juan, Pedro)
- Laura "es novia de" Manuel. (Laura, Manuel)
- Samuel "es papá de" Irma. (Samuel, Irma)

Relación

Sean A y B dos conjuntos dados.

Cuando a todos o para algunos de los elementos de un conjunto A, les corresponde, vinculado por alguna condición o propiedad, uno o más elementos del conjunto B, decimos que hay una relación R entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B.

En los ejemplos anteriores exponíamos la relación entre seres humanos. En matemáticas nos referimos, en la mayoría de los casos, a la relación que existe entre conjuntos de números.

Una manera fácil de trabajar una relación es con las *parejas ordenadas* de los elementos que se vinculan. Para obtener las parejas ordenadas, debemos recordar lo que estudiamos sobre producto cartesiano.

Producto cartesiano

Si tenemos los conjuntos

$A = \{a, b\}$

$B = \{c, d, f\}$

el producto cartesiano de estos dos conjuntos $A \times B$ (en este orden) es el producto de todos los posibles pares ordenados, tales que la primera componente del par ordenado es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

La expresión $A \times B$ se lee: "A cruz B".

Por descripción, se expresa en la forma siguiente:

$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

Se lee así: la pareja (x, y) tal que x pertenece al conjunto A y pertenece al conjunto B. La línea vertical debe leerse como "tal que".

Desarrollando el producto queda:

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, f), (b, c), (b, d), (b, f)\}$$

Los elementos del conjunto producto forman parejas ordenadas. En el ejemplo anterior son:

$$(a, c), (a, d), (a, f), (b, c), (b, d), (b, f)$$

En la pareja (a, c), a es la **primera componente** y c la **segunda componente**.

En el caso particular de que los elementos de los conjuntos sean números reales, se acostumbra llamar a la primera componente de la pareja ordenada **abscisa** y a la segunda **ordenada**.

Ejemplo:

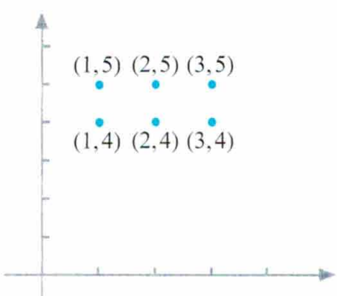
1. Sean los conjuntos A y B, determina el producto cartesiano y represéntalo en el plano cartesiano.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5\}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

Las parejas se representan como puntos en el plano cartesiano en la forma siguiente:



Ahora que ya repasamos las bases del producto cartesiano y sabemos cómo determinar las parejas ordenadas, continuaremos con el tema de relaciones.

Ejemplo:

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 7\}$ y la relación R "es mayor que", determina el conjunto solución y represéntalo con la gráfica sagital (se llama sagital por las flechas).

Solución:

Obtenemos el producto cartesiano de los conjuntos:

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 7), (6, 2), (6, 3), (6, 7)\}$

Las únicas parejas relacionadas por la condición "ser mayor que" son:

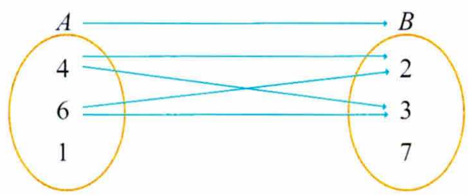
$A\ R\ B = \{(4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)\}$

Se conoce como "relación en $A \times B$" al conjunto de todas las parejas que hacen verdadera la proposición "es mayor que".

Por costumbre, en lugar de escribir $A\ R\ B$, también se puede utilizar la letra R para el conjunto solución o cualquier otra letra.

$R = \{(4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)\}$

Representación de la solución con gráfica sagital:



Observa cómo la solución está de acuerdo con la definición. A algunos elementos del conjunto A les corresponde uno o más elementos del conjunto B; en este caso, los elementos se vinculan por la condición "ser mayor que".

En todos los casos, el conjunto solución es $R \subseteq A \times B$, que se lee así:

"El conjunto solución es un subconjunto del producto $A \times B$", o bien:

"El conjunto solución es igual al producto A cruz B".

La regla de correspondencia también se puede expresar como una proposición abierta con dos variables "x es mayor que y".

Dominio

Se conoce como **dominio de la relación *R*** al conjunto de las primeras ordenadas que pertenecen a $A \times B$. Si continuamos con el ejemplo anterior tenemos:

$$\text{Dominio} = \{1, 4, 6\}$$

Contradominio

Se conoce como **contradominio de la relación *R*** al conjunto de las segundas ordenadas que pertenecen a $A \times B$. Si continuamos con el ejemplo anterior tenemos:

$$\text{Contradominio} = \{2, 3, 7\}$$

En inglés, se usa la palabra *range* para denominar el contradominio. Esta palabra se ha traducido al castellano de diferentes maneras: *contradominio*, *codominio*, *recorrido*, *rango*, entre otras. Sin embargo, en este texto utilizaremos la palabra *contradominio* porque es la de mayor uso en el programa oficial de educación media básica.

Como en el ejemplo anterior se refiere a una relación A y B (en este orden), el primer elemento de cada pareja es un elemento de A y el segundo es un elemento de B. Observa que en cada pareja del conjunto solución el primer elemento es "mayor que" el segundo.

La pareja (1, 3) no está en el conjunto solución porque 1 no es mayor que 3 y además la relación es "entre A y B", no "entre B y A".

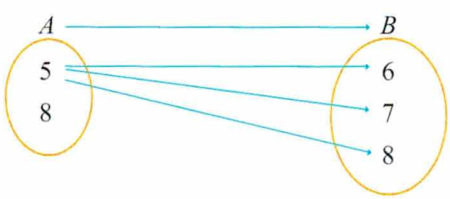
Ejemplo:

- **1.** Dados los conjuntos $A = \{5, 8\}$, $B = \{6, 7, 8\}$ y la regla de correspondencia "es menor que", determina el conjunto solución, exprésalo con la notación sagital y señala el dominio y el contradominio.

Solución:

$A \times B = \{(5, 6), (5, 7), (5, 8), (8, 6), (8, 7), (8, 8)\}$

$A\ R\ B = \{(5, 6), (5, 7), (5, 8)\}$



Dominio $= \{5, 8\}$ *Contradominio* $= \{6, 7, 8\}$

Función

La función es un caso particular de las relaciones en las que a todo elemento de un conjunto A le corresponde exactamente un solo elemento del conjunto B. En las relaciones, por el contrario, a todos o a algunos elementos del conjunto A se les puede asignar uno o más elementos del conjunto B.

Ejemplo:

- **1.** Sean los conjuntos:

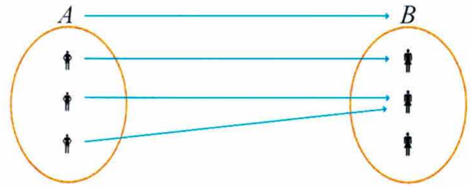
$A = \{\text{Manuel, Pedro, Juan}\}$

$B = \{\text{Inés, María, Patricia}\}$

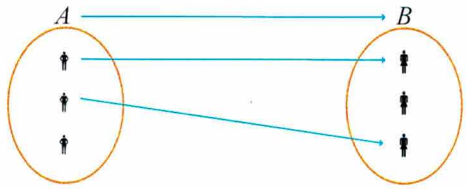
y se desea asignar a cada nombre una o varias mujeres.

Gráficamente podríamos presentar las siguientes soluciones:

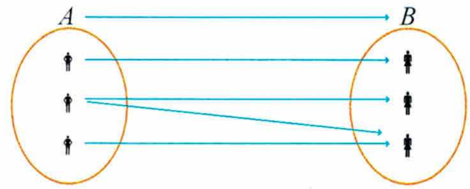
Sí es función.



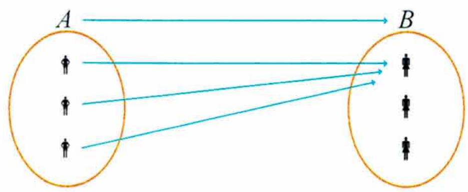
Sí es función.



No es función porque un elemento del dominio no se asocia en el contradominio.



No es función porque un elemento del dominio tiene más de un asociado en el contradominio.



Sí es función.

Definición: Si tenemos dos conjuntos A y B, y una regla que asocie a todo elemento del conjunto A con uno y sólo un elemento del conjunto B, entonces decimos que tenemos una función f definida en A con valores en B.

Una función consta de tres elementos:

- Un conjunto A llamado *dominio de la función.*
- Otro conjunto B llamado *contradominio de la función.*
- Una regla de correspondencia f que asocia a todo elemento de A con uno y sólo un elemento del conjunto B.

La regla puede ser *un diagrama, una ecuación, una tabla de valores* y *una gráfica.*

La regla debe tener las siguientes propiedades:

Primera. Ningún elemento del dominio puede quedar sin asociado en el contradominio.

Segunda. Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el contradominio. Esto no excluye que varios elementos del dominio tengan al mismo asociado en el contradominio.

Si tenemos los conjuntos A y B, y la regla de correspondencia f cumple con las propiedades señaladas en el párrafo anterior, entonces la terna (A, B, f) es una función cuya notación se escribe:

$f: A \to B$ y la leemos así: "f va de A a B".

Si x es un elemento de A, entonces el elemento de B asociado a x por medio de la regla de correspondencia se expresa de la forma siguiente:

$$f(x)$$

y la leemos así: "f de x". Se le llama la imagen de x bajo f. Gráficamente queda así:

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

Se llama imagen de x al elemento asociado a x bajo la función f.

En lugar de usar la letra f para designar la función, podemos utilizar otras más.

Ejemplos:

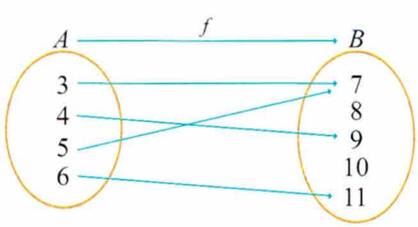
- **1.** $F(x)$
- **2.** $G(x)$
- **3.** $\theta(x)$

Es importante que sepas que el símbolo $f(x)$ no indica el producto de f por x; en realidad, el símbolo $f(x)$ representa el valor en la imagen de f que corresponde al valor de x en el dominio de f.

Regla de correspondencia de una función

Ejemplos:

A. Regla de correspondencia dada por un *diagrama* (notación sagital).



Las flechas van de los valores de la variable independiente a los valores de la variable dependiente.

La imagen de 4 es 9, la de 6 es 11...

Dominio (Variable independiente)

Contradominio (Variable dependiente)

B. Regla de correspondencia dada por una ecuación.

- **1.** Tenemos la ecuación $3x^2 - y + 4 = 0$ y al expresarla como una función, que designaremos como f en este caso, obtenemos:

$$3x^2 - y + 4 = 0;\ y = 3x^2 + 4$$

$$y = f(x) = 3x^2 + 4$$

$$f(x) = 3x^2 + 4$$

Dado que $y = f(x)$, al citar una función podemos usar indistintamente cualquiera de las dos notaciones:

$$y = 3x^2 + 4 \quad \text{o} \quad f(x) = 3x^2 + 4$$

La expresión $3x^2 + 4$ establece la regla con la que se puede determinar el único valor de y una vez que el valor de x esté expresado. En este ejemplo, la regla señala que debemos multiplicar el valor asignado a x por sí mismo y a continuación, multiplicar este producto por 3 y sumarle 4.

La *función* f es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que x y y satisfacen la ecuación $3x^2 - y + 4 = 0$; y que se expresa:

$$f = \{(x, y) \mid y = 3x^2 + 4\}$$

La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

El *dominio* de la función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente. En este caso, el conjunto de todos los números reales.

El *contradominio* de la función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente. En este caso, el conjunto de todos los números reales.

Una función que va de los números reales a los números reales se expresa con la siguiente notación:

$$f : R \rightarrow R$$

Si la regla de correspondencia está dada por una ecuación y no se especifica el dominio, entonces suponemos que el dominio incluye a todos los números reales para los cuales la ecuación tiene sentido (como número real).

2. Sea la función $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

En este ejemplo, el dominio son todos los números reales excepto el número 2, ya que si sustituimos la fórmula con este valor, obtendríamos:

$$f(2) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0}$$

Recuerda que en los números reales la división entre cero no existe. Así, el dominio son todos los números reales excepto el número 2.

3. La expresión $y > x$ no define una función porque hay muchos valores de y para cada valor de x; por ejemplo, si $x = 3$ entonces y puede ser cualquier número mayor que 3.

4. La expresión $y^2 = x$ no define una función porque hay dos valores de y para cada valor positivo de x. Por ejemplo, si $x = 4$, entonces y puede ser igual a 2 o a -2; no obstante, la expresión $y^2 = x$ sí es una relación.

5. La expresión $x^2 + y^2 = 9$ no define una función porque:

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Para cada valor positivo de x hay dos valores de y; esto se señaló antes al definir una función: "...una regla de correspondencia que asocie a todo elemento del conjunto A, con uno y sólo un elemento del conjunto B".

Sin embargo, en todos los textos de cálculo diferencial se indican múltiples ejercicios en que se debe derivar una expresión como la que sigue:

$y=\sqrt{9-x^2}$ y lo que sucede es que *se deriva considerando al radical únicamente con el signo positivo.*

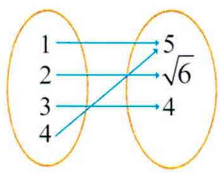
C. Regla de correspondencia dada por una tabla de valores

x	1	2	3	4
y	5	$\sqrt{6}$	4	5

El dominio son los números 1, 2, 3 y 4 y el contradominio los números 4, 5 y $\sqrt{6}$.

La imagen de 2 es $\sqrt{6}$, la de 3 es 4 y así sucesivamente.

Se expresa gráficamente así:



La tabla también se puede expresar en forma vertical:

x	y
1	5
2	$\sqrt{6}$
3	4
4	5

Otra forma de expresar la regla de correspondencia, como tabla de valores es la siguiente:

$$\text{dominio} = \{3, 4, 5, 6\}$$

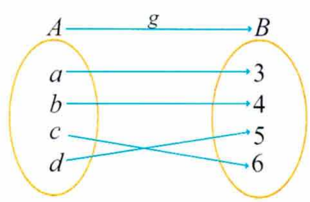
Regla de correspondencia g:

$g(a)=3$

$g(b)=4$

$g(c)=6$

$g(d)=5$



Gráficamente se representa así.

Nota: este resultado no se puede expresar en el plano cartesiano.

Gráfica de una función

Una función real es una función donde el dominio y el contradominio incluyen sólo números reales. Se expresa así:

$$f: R \rightarrow R$$

A menos que indiquemos lo contrario, todas las funciones que analizaremos en este libro son funciones reales. Recuerda que en expresiones como $y = \sqrt{x^2 - 1}$, en las que interviene un radical, siempre consideraremos su signo como positivo.

Hemos observado cómo una función se incluye para cada punto de parejas ordenadas de números reales; de este modo, es posible señalar estos puntos en el plano cartesiano. La figura que resulta es la *gráfica de la función*.

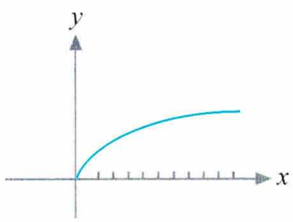
Se marcan los valores del dominio sobre el eje de las x y los valores del contradominio que resulten en el eje de las y.

Ejemplos:

1. Traza la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, dominio = 0, 1, 2, 4, 6. Señala el contradominio que resulte.

Tabla de valores (tabulamos):

x	0	1	2	4	6
y	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$



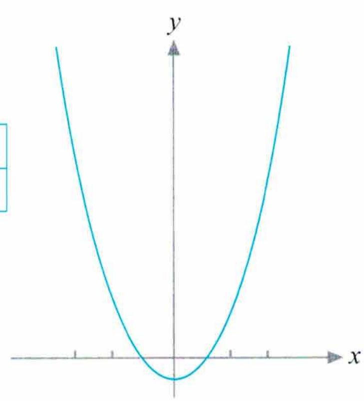
Contradominio = $0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{6}$

2. Traza la gráfica de la función $y = x^2 - 1$ propone el dominio y determina el contradominio.

En este ejemplo, el dominio son todos los números reales. En consecuencia, para la tabla de valores podemos elegir números enteros que faciliten las operaciones.

Tabla de valores (tabulamos):

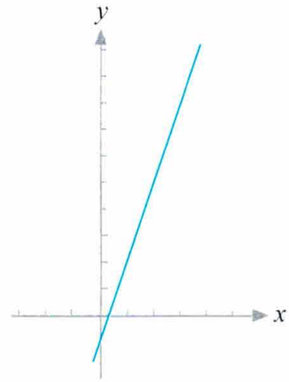
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	3	0	−1	0	3	8



Nota: Con base en tus conocimientos de geometría analítica ya sabes qué es una parábola.

El contradominio que resultó es: 8, 3, 0, −1, 0, 3, 8.

3. Traza la función $f(x) = 3x - 1$ y propone el dominio.



El dominio son todos los números reales. Observa que se trata de una recta, por ello únicamente tomamos dos puntos para trazar su gráfica. Tabla de valores (tabulamos):

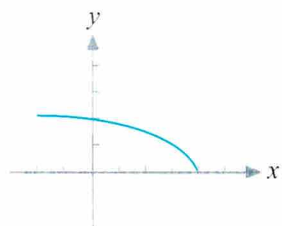
x	0	2
y	−1	5

¿Cuál es el contradominio?

4. Traza la gráfica de la función $y = \sqrt{4 - x}$ y propone el dominio.

En este caso podríamos pensar que el dominio son todos los números reales, pero como el valor de y debe ser un número real, el dominio queda limitado a todos los números reales x para los cuales la expresión $4 - x$ sea mayor o igual a cero, de donde el dominio es el conjunto de los números reales x tales que $x \leq 4$.
Tabla de valores:

x	4	3	2	0	−1
y	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$



¿Cuál es el contradominio?

No toda regla de correspondencia es una función porque no es suficiente dar una regla de correspondencia y dos conjuntos; hay que señalar además cuál es el dominio y el contradominio. Asimismo, hay que confirmar que la regla de correspondencia asocia uno, y sólo uno, de los elementos del contradominio a todos los elementos del dominio. De ahí que sea importante saber resolver problemas como el siguiente:

Ejemplo:

1. Determina si la terna (D, C, j) es una función.

Dominio = $\{a, b, c, d\}$

Contradominio = $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

Regla de correspondencia j.

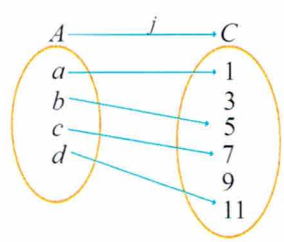
$j(a) = 1$

$j(b) = 5$

$j(c) = 7$

$j(d) = 11$

Solución:



Es una función

Las funciones son los temas que por lo regular se analizan en los cursos de cálculo diferencial e integral.

Clasificación de las funciones

Para clasificar las funciones tomaremos como referencia el contradominio, las cuales son:

- Inyectiva (unívoca)
- Sobreyectiva (suprayectiva)
- Biyectiva (biunívoca)

A. Función inyectiva (uno a uno)

Una función es inyectiva, también llamada unívoca, cuando a cada elemento del contradominio le corresponde sólo un elemento del dominio sin importar que sobren en el contradominio.

Ejemplo:

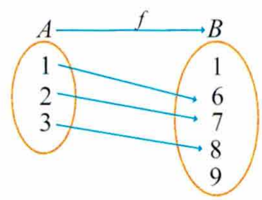
1. $f: A \to B$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 6, 7, 8, 9\}$

$f(x) = x + 5$

Solución:



Usamos la notación sagital:

Es una función inyectiva.

B. Función sobreyectiva (sobre)

Una función es sobreyectiva, también llamada suprayectiva, cuando a todo elemento del contradominio le corresponde uno o más elementos del dominio. No deben sobrar elementos en el contradominio, no importa que algunos elementos del contradominio sean imágenes de más de un elemento del dominio (a todos les debe llegar flecha, puede ser que a algunos más de una).

Ejemplo:

1. $f: A \to B$

$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

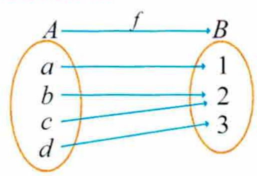
$f(a) = 1$

$f(b) = 2$

$f(c) = 2$

$f(d) = 3$

Solución:



Usamos la notación sagital:

Es una función sobreyectiva

C. Función biyectiva

Una función es biyectiva, también llamada biunívoca, si todo elemento del contradominio es imagen de uno y solamente un elemento del dominio. La función biyectiva es una combinación de las funciones inyectivas y sobreyectivas. En consecuencia, en el contradominio de la función biyectiva no sobran elementos y ningún elemento es imagen de más de un elemento del dominio.

Ejemplo:

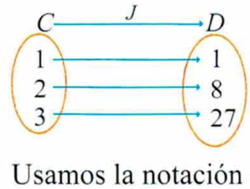
1. $J: C \rightarrow D$

$C = \{1, 2, 3\}$

$D = \{1, 8, 27\}$

$J(x) = x^3$

Solución:



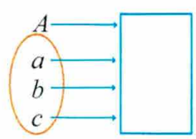
Usamos la notación sagital:

Es una función biyectiva.

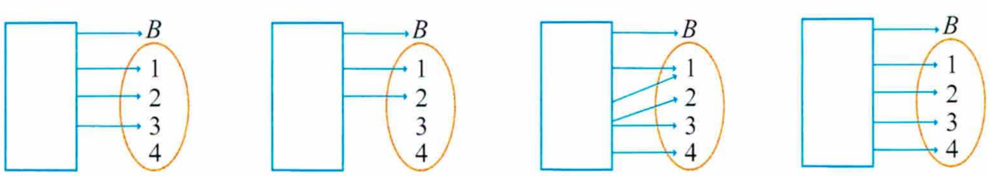
Procedimiento nemotécnico para determinar si una relación es una función y de qué tipo

Con base en los conjuntos del dominio y del contradominio, y la regla de correspondencia, expresamos el resultado usando la representación sagital.

A continuación, para determinar si es función cubrimos con una tarjeta o con la mano el contradominio; si de todo elemento del dominio sale una flecha, concluimos que es una función.



Para determinar qué tipo de función es, recuerda que debemos tomar como referencia el contradominio; en consecuencia, tapamos con la tarjeta el dominio:

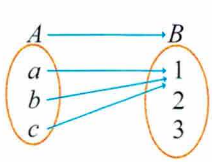


Funciones inyectivas — Función sobreyectiva — Función biyectiva

Hay funciones que no son inyectivas ni sobreyectivas ni biyectivas

Ejemplo:

1.



- No es una función inyectiva porque para serlo, una flecha tendría que llegar a cada elemento, sin importar que sobren algunos.
- No es sobreyectiva porque para serlo, las flechas tendrían que llegar a todos los elementos, sin importar que a unos elementos les llegue más de una.

Como la función no es inyectiva ni sobreyectiva, entonces tampoco es biyectiva, pues ésta resulta de la combinación de las dos.

Funciones explícitas e implícitas

Si las operaciones que hay que realizar con la variable independiente para obtener la dependiente están indicadas, se dice que la función está en forma *explícita*. En caso contrario, es *implícita*.

La función $y = 3x - 2$ está expresada en forma explícita; la misma función expresada en forma implícita quedaría así: $3x - y - 2 = 0$

El caso más común es como el del ejemplo anterior, en que se elige a la literal x como variable independiente, aunque nada nos impide escoger a la literal y, a menos de que en el desarrollo de un problema continúe como tal hasta su solución.

En $y = 3x + 6$ si tomáramos a la y como variable independiente obtendríamos:

$x = \frac{y-6}{3}$ Expresada como función: $x = f(y) = \frac{y-6}{3}$

Funciones de una variable y de varias variables

Si el valor de la función depende de una sola variable, se dice que es una **función de una sola variable.**

Ejemplos:

1. En $A = \pi r^2$, que es la fórmula para obtener el área de un círculo, la cual depende del radio r, por lo que es una función de una sola variable.

   Si el valor de la función depende de varias variables, se dice que es **función de varias variables**.

2. En $A = ba$ que es la fórmula para obtener el área de un rectángulo, depende de la altura a y de la base b; en consecuencia es una función de dos variables.

3. Las funciones de varias variables se representan poniendo comas entre las variables.
   $f(a, b, c)$

Funciones algebraicas y funciones trascendentes

Las **funciones algebraicas** son aquellas cuyo valor se obtiene por medio de un número determinado de operaciones en que no intervienen las relaciones trigonométricas.

Las funciones algebraicas pueden ser, según sean las operaciones a que están sometidas las variables, *enteras*, *racionales e irracionales.*

Ejemplos:

1. $y = 2x^2 + 4x + 3$ Entera
2. $y = \frac{x^2 - 2}{x^3 + 1}$ Racional
3. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ Irracional

Las **funciones trascendentes** son aquellas en que intervienen las relaciones trigonométricas:

$$y = \cos x$$

Estudio de una función

Para estudiar una función $y = f(x)$ es necesario conocer los valores que podemos asignar a la variable independiente y que pueden ser cualquiera del conjunto de los números reales, de un subconjunto de éstos, en grados sexagesimales, o en radianes, que se expresan en su dominio, llamado por algunos autores dominio de definición de la función.

Si $f(x)$ es una función de x y a es una valor que está en su dominio, la expresión $f(a)$ significa el valor numérico que obtenemos al sustituir x por a en $f(x)$; o sea, el valor que toma $f(x)$ cuando $x = a$.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^2 - 5x + 6$, determina:

a) $f(1)$

b) $f(-3)$

c) $f(x + 1)$

Soluciones:

a) $f(1) = (1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

b) $f(-3) = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 + 15 + 6 = 30$

c) $f(x + 1) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = x^2 - 3x + 2$

2. Si $f(x) = 3x^2 - 1$, determina:

a) $f(-2)$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(3x^2 - 1)$

d) $f(x) + f(h)$

e) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ con $h \neq 0$

Soluciones:

a) $f(-2) = 3(-2)^2 - 1 = 11$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

c) $f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1)2 - 1 = 3(9x^4 - 6x^2 + 1) - 1$

$$= 27x^4 - 18x^2 + 3 - 1 = 27x^4 - 18x^2 + 2$$

d) $f(x) + f(h) = 3x^2 - 1 + 3h^2 - 1 = 3x^2 + 3h^2 - 2$

e) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x^2+2xh+h^2)-1-3x^2-2}{h}$$
$$= \frac{h(6x+3h)}{h} = 6x+3h$$

3. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, demuestra que $f(a) - f(c) = f\left(\frac{ac}{c-a}\right)$

Solución:

$$f(a) = \frac{1}{a}; \quad f(c) = \frac{1}{c}$$

$$f(a) - f(c) = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ac}$$

Ahora:

$$f\left(\frac{ac}{c-a}\right) = \frac{1}{\frac{ac}{c-a}} = 1 \div \frac{ac}{c-a} = \frac{c-a}{ac}$$

Por propiedad transitiva concluimos:

$$f(a) - f(c) = f\left(\frac{ac}{c-a}\right)$$

4. Si $g(\alpha) = \text{sen } 2\alpha + \cos \alpha$, determina:

a) $g(0)$

b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

c) $g(x^2)$

Soluciones:

$g(\alpha) = \text{sen } 2\alpha + \cos \alpha$

a) $g(0) = \text{sen } 2(0) + \cos 0 = \text{sen } 0° + \cos 0° = 0 + 1 = 1$

b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\, 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\, 180° + \cos 90° = 0 + 0 = 0$

c) $g(x^2) = \text{sen } 2x^2 \ \cos x^2$

5. Si $\phi(y) = 5 \text{ sen } y$, determina $\phi(1°)$

Solución:

$\phi(1°) = 5 \text{ sen } 1° = 5(.0175) = .0875$

6. Si $f(x)=\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$, calcula $f(4)$.

Solución:

$$f(4)=\left(\frac{1}{4-4}\right)=\frac{1}{0}\ \text{No está definido.}$$

El valor obtenido no está definido en los números reales porque en ellos no existe la división entre cero.

7. Si $f(x) = 2 \log x$, calcular $f(1 - x)$.

Solución:

$$f(1-x)=2[\log(1-x)]=2\left(\frac{\log 1}{\log x}\right)$$

Intervalo de una variable

Con frecuencia, el desarrollo de un problema se restringe a los valores que se asignan a la variable independiente que tomamos de un subconjunto de los números reales. Los números así considerados forman un *intervalo*.

Sean a y b dos números reales de manera que $a < b$, tenemos:

- Intervalo abierto

No incluye a sus extremos que representan a y b.

$a < x < b$

Ejemplo:

1. $-2 < x < 1$ se expresa gráficamente así:

- Intervalo cerrado

Si al intervalo abierto se le incluyen sus extremos a y b, se denomina intervalo cerrado de a y b.

$a \leq x \leq b$

Ejemplo:

1. $-2 \leq x \leq 0$ se expresa gráficamente así:

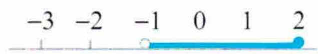
- Intervalo semiabierto

Al intervalo que contiene a uno de sus extremos se le llama intervalo semiabierto.

$a < x \leq b$

Ejemplo:

1. $-1 < x \leq 2$ se expresa gráficamente así:



$a \leq x < b$

Ejemplo:

1. $-2 \leq x < 3$ se expresa gráficamente así:

- Intervalo infinito

Es el que se forma por todos los números x, tales que $x < a$, $x < a$; también $x > a$, $x \geq a$.

Ejemplos:

1. Todos los números mayores que 7 se expresan gráficamente así:

$x > 7$

2. Todos los números iguales o menores que −1 se expresan gráficamente así:

$x < -1$

Se dice que una función $f(x)$ está definida en un intervalo cuando lo está en un punto cualquiera de dicho intervalo.

¡Aplícate!

I. Responde las siguientes preguntas.

1. ¿A qué se llama constante arbitraria? Da un ejemplo.

2. ¿En qué momento se dice que una variable es independiente? Escribe un ejemplo.

3. ¿A qué se le llama constante absoluta? Da un ejemplo.

4. En la fórmula para obtener el volumen de una pirámide regular $V = \frac{Bh}{3}$, donde B es el área de la base, identifica las variables y qué tipo de constante representa el número 3.

Sol. V, B, h; Constante absoluta.

5. Escribe el concepto de función.

6. Determina si la terna (D, C, f) es una función y justifica las razones.

$Df = \{a, b, c\}$

$Cf = \{3, 4, 5, 6\}$ *Sol.* No es una función.

Regla de correspondencia:

$f(a) = 3$

$f(b) = 4$

$f(c) = 6$

$f(d) = 5$

II. Identifica los siguientes intervalos y represéntalos en una gráfica.

1. $-3 < x < 0$ *Sol.* Abierto.

2. $-4 \leq x < 0$ *Sol.* Semiabierto.

3. $x \geq 2$ *Sol.* Infinito.

4. $x \geq 5$ *Sol.* Infinito.

III. Si $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, determina:

a) $f(0)$ *Sol.* 1

b) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ *Sol.* $\frac{49}{4}$

c) $f(3)$ *Sol.* $\frac{1}{4}$

IV. Si $f(\theta) = \text{sen } 2\theta + \cos\theta$, determina:

a) $f(0)$ *Sol.* 1

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *Sol.* 1.366

c) $f(\pi)$ *Sol.* -1

V. $f(y) = \frac{1}{y}$, demuestra que $f(a) - f(b) = f\left(\frac{ab}{b-a}\right)$

VI. $f(y) = y^3 - 5y^2 - 4y + 20$; comprueba que $f(t + 1) = t^3 - 2t^2 - 11t + 12$

VII. $g(x) = x^2 - 2x + 3$; comprueba que $g(x + k) = x^2 - 2x + 3 + 2(x - 1)k + k^2$

VIII. En las siguientes expresiones, y es la variable dependiente. Explica si se define una función. Considera de los $R \rightarrow R$

1. $y = 2x + 3$ *Sol.* Sí

2. $y = 5$ *Sol.* Sí

3. $y < 5x$ *Sol.* No

4. $y = \frac{4}{x}$ con $x \neq 0$ *Sol.* Sí

IX. En los siguientes ejercicios define el dominio que consideres adecuado para que las expresiones sean funciones.

1. $f(x) = 5x$ — ***Sol.*** Todos los R.
2. $f(x) = 7 - 3x$ — ***Sol.*** Todos los R.
3. $G(x) = x^{\frac{1}{3}}$ — ***Sol.*** Todos los R.
4. $y = \dfrac{4}{4x+1}$ — ***Sol.*** Todos los R excepto $x = -\dfrac{1}{4}$
5. (2, 3), (4, 5), (7, 1) — ***Sol.*** $\{2, 4, 7\}$

Funciones pares e impares

Se dice que una función f es una función par si para toda x en el dominio de f se cumple que:

$$f(x) = f(-x)$$

Una función es par si al sustituir el valor de la variable independiente x por $-x$ se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo:

1. Señala si la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ es par o impar.

Solución:

$f(x) = x^4 - 2x^2$

Sustituimos x por $-x$:

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2$

Como la expresión $x^4 - 2x^2$ es la $f(x)$ inicial, se cumple que $f(-x) = f(x)$.

De donde $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Es una función par.

Se dice que una función f es una función impar si para toda x en el dominio de f se cumple que:

$$f(-x) = -f(x)$$

Una función es impar si al sustituir el valor de la variable independiente x por $-x$ se obtiene el valor simétrico de la función.

Ejemplo:

1. Señala si la función $f(x) = -3x + 2x^3$ es par o impar.

Solución:

$f(x) = -3x + 2x^3$

Sustituimos x por $-x$ y se tiene:

$f(-x) = -3(-x) + 2(-x)^3 = 3x - 2x^3$

La expresión $3x - 2x^3$ se puede expresar como:

$-(-3x + 2x^3) = -f(x)$

Se cumple que $f(-x) = -f(x)$, de donde $f(x) = -3x + 2x^3$.

Es una función impar.

Funciones que no son pares ni impares

Ejemplo:

1. Señala si la función $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x$ es par o impar.

Solución:

$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x$

Sustituimos x por $-x$; y obtenemos:

$f(-x) = 3(-x)^4 + 5(-x)^3 + (-x) = 3x^4 - 5x^3 - x$

Como:

$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x$

$f(-x) = 3x^4 - 5x^3 - x$

No se cumple que $f(-x) = f(x)$ de donde no es par.

Como:

$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x$

$f(-x) = 3x^4 - 5x^3 - x$ que se puede expresar como:

$-f(x) = -(-3x^4 + 5x^3 + x)$; pero entonces no se cumple que $f(-x) = -f(x)$. En consecuencia no es impar.

Conclusiones:

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Hay funciones que no son pares ni impares.

Ejemplos:

1. Señala si la función $f(x) = x^2 + 1$ es par o impar. Traza la gráfica.

Solución:

$f(x) = x^2 + 1$

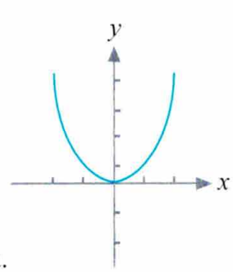
Sustituimos x por $-x$:

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$

Se cumple que $f(-x) = f(x)$, de donde $f(x) = x^2 + 1$.

Es una función par.

x	0	1	2	−1	−2
y	1	2	5	2	5



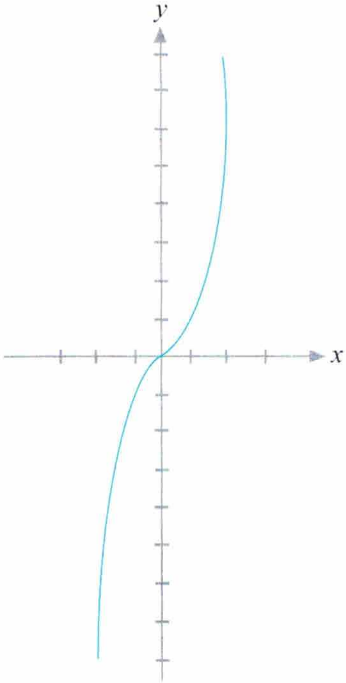
2. Señala si la función $f(x) = x^3$ es par o impar. Traza la gráfica.

Solución:

$f(x) = x^3$

Sustituimos x por $-x$:

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$



La expresión $-x^3$ se puede expresar como $-(x^3)$

Se cumple $f(-x) = -f(x)$, de donde $f(x) = x^3$.

Es impar.

x	0	0.5	−0.5	1	−1	2	−2
y	0	.12	−.12	1	−1	8	−8

Funciones crecientes y decrecientes

A. Una función es creciente cuando se cumple

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

Para cualquier h positiva, la función $f(x)$ es creciente.
Recuerda que si señalamos un número real cualquiera en la recta numérica, el número que esté a su derecha siempre será mayor que él.
Si tenemos que x es un número real, entonces $x + h$ está a la derecha de x. No olvides que el valor de h siempre debe ser positivo.

Ejemplo:

1. Señala si la función $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ es creciente o decreciente.

Solución:

$$f(x)=\frac{3}{4}x+2$$

Analizamos el comportamiento de $f(x)$ en el punto $x + h$.

Entonces $f(x+h)=\frac{3}{4}(x+h)+2$

$$=\frac{3x}{4}+\frac{3h}{4}+2$$

Revisamos $f(x + h) - f(x)$ para determinar si el valor es mayor o menor que cero.

Sustituimos $f(x+h)-f(x)=\frac{3x}{4}+\frac{3h}{4}+2-\left(\frac{3}{4}x+2\right)$

$$=\frac{3x}{4}+\frac{3h}{4}+2-\frac{3x}{4}-2$$

$$=\frac{3h}{4}$$

Como h siempre es positiva, resultado del ejemplo $\frac{3h}{4}$ es positivo.

Concluimos que como $f(x + h) - f(x) > 0$, entonces $f(x)=\frac{3x}{4}+2$.

Es creciente.

B. Una función es decreciente si se cumple:

$$f(x+h)-f(x)<0$$

Para cualquier h positiva, la función $f(x)$ es decreciente.

Ejemplo:

1. Señala si la función $f(x)=-\frac{5x}{3}+1$ es creciente o decreciente.

Solución:

$$f(x)=-\frac{5x}{3}+1$$

Analizamos el comportamiento de $f(x)$ en el punto $x+h$

Entonces $f(x+h)=-\frac{5}{3}(x+h)+1=-\frac{5x}{3}-\frac{5h}{3}+1$

Revisamos $f(x+h)-f(x)$ para determinar si el valor es mayor o menor que cero.

Sustituyendo: $f(x+h)-f(x)=-\frac{5x}{3}-\frac{5h}{3}+1-\left(-\frac{5x}{3}+1\right)$

$$=-\frac{5x}{3}-\frac{5h}{3}+1+\frac{5x}{3}-1$$

$$=-\frac{5h}{3}$$

Dado que h siempre es positiva, el resultado del ejemplo $-\frac{5h}{3}$ es negativo.

Concluimos que como $f(x+h)-f(x)<0$, entonces $f(x)=-\frac{5x}{3}+1$.

Es decreciente.

Nota: Al analizar otro tipo de funciones, puede suceder que para una misma función $f(x)$, y al sustituir h, los resultados sean unos positivos y otros negativos. Por lo tanto, no podemos asegurar si la función $f(x)$ siempre es creciente o decreciente, de ahí la razón de tener que analizarla en diferentes intervalos.

Este comportamiento lo estudiaremos con más detalle al obtener la derivada y al analizar su valor en los puntos críticos.

Álgebra de funciones

Una función se puede expresar de diferentes maneras:

$f(x)$, $g(x)$, $\theta(x)$...

Dadas las funciones $f(x)$, $g(x)$, la suma se define en la forma siguiente:

Ejemplo:

1. Suma $f(x)=5x^2+2x+1$ y $g(x)=x+2$

Solución:

$$(f+g)\ (x)=f(x)+g(x)=5x^2+2x+1+x+2$$

$$=5x^2+3x+3$$

Observa que usamos f para referimos a la expresión $5x^2 + 2x + 1$ y usamos g para $x + 2$. El resultado de la función suma es:

$(f + g)(x)$ es $5x^2 + 3x + 3$

La diferencia se define así:

$(f - g)(x)$ es $f(x) - g(x)$

Ejemplo:

1. Resta $\theta(x) = 2x^2 - 4$ y $H(x) = x^2 + 5$

Solución:

$$(\theta - H)(x) = \theta(x) - H(x) = 2x^2 - 4 - (x^2 + 5)$$
$$= 2x^2 - 4 - x^2 - 5 = x^2 - 9$$

El producto se define así:

$(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Ejemplo:

1. Multiplica $P(x) = 2x^2 + 1$ y $G(x) = x$

Solución:

$(P - G)(x) = P(x) \cdot G(x) = (2x^2 + 1)x = 2x^3 + x$

El cociente se define así:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se excluyen los valores de x para los cuales $g(x) = 0$

Ejemplo:

1. Divide $P(x) = 4x^5 - 6x$ entre $\theta(x) = 2x$

Solución:

$$\left(\frac{P}{\theta}\right)(x) = \frac{P(x)}{\theta(x)} = \frac{4x^5 - 6x}{2x} = 2x^4 - 3$$

Para la suma de más de dos funciones se define así:

$$(f + g + \theta - K)(x) = f(x) + g(x) + \theta(x) - K(x)$$

Ejemplo:

1. Suma $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = 5$, $\theta(x) = x^3 + 1$ y $K(x) = 7$

Solución:

$(f + g + \theta - K)(x) = 5x + 2 + 5 + x^3 + 1 - 7 = x^3 + 5x + 1$

Nota: Seguimos un procedimiento semejante para multiplicar más de dos funciones.

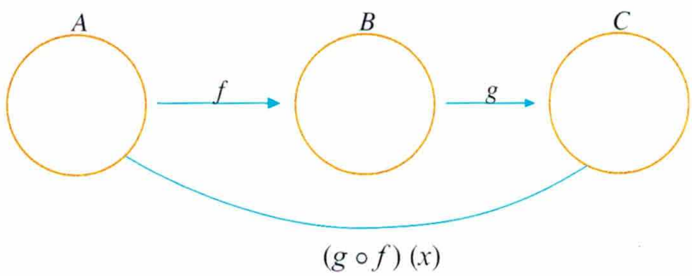
Composición de funciones

Es una operación de funciones que consiste en aplicar sucesivamente dos funciones en un orden determinado, con lo que se obtiene una tercera función.

$g \circ f : A \to C$ así obtenida se le llama la composición de la función f con la función g.

El símbolo $(g \circ f)$ se lee "f compuesta con g" o bien, "f seguida de g".

De donde si $x \in A$, entonces $f(x) \in B$ y $g(f(x)) \in C$.



Observa que hay una inversión en la notación, pero así es correcto.

Ejemplo:

1. Si $f : R \to R$ y $f : R \to R$, con $f(x) = 3x^2 + 1$; $g(x) = 4x$, determina $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$ y $(g \circ g)(x)$.

Solución:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 1) = 4(3x^2 + 1) = 12x^2 + 4$

Observa que este resultado no se debe simplificar porque es una función y no una ecuación.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x) = 3(4x)2 + 1 = 48x^2 + 1$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x^2 + 1) = 3(3x^2 + 1)2 + 1$

$= 3(9x^4 + 6x^2 + 1) + 1$

$= 27x^4 + 18x^2 + 3 + 1$

$= 27x^4 + 18x^2 + 4$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = 4(4x) = 16x$

Gráfica de una función

En geometría analítica estudiamos cómo se traza la gráfica de una función.

Si $f : A \to B$ definimos la gráfica de f como un subconjunto del plano, de donde:

Gráfica de $f = \{x, f(x) \mid x \in \text{A}\}$

Ejemplo:

1. Traza la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $-2 < x < 2$

Solución:

Utiliza los conocimientos de geometría analítica para trazar la gráfica de la función $f(x) = x^2$, que es una parábola. Recuerda que también podemos tabular:

x	0	1	-1	$\frac{3}{2}$	2	-2	$-\frac{3}{2}$
y	0	1	1	$\frac{9}{4}$	4	4	$\frac{9}{4}$

Posteriormente, en el tema de gráficas, trazaremos la gráfica de cualquier función; además, identificaremos en ella todos sus puntos importantes.

¡Aplícate!

I. Resuelve las siguientes operaciones.

1. Si $F(x)=\sqrt{2x+3}$, calcula $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ con $h\neq 0$ — ***Sol.*** $\dfrac{2}{\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}}$

2. Si $g(x)=\sqrt{3x-1}$, calcula $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ con $h\neq 0$ — ***Sol.*** $\dfrac{3}{\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1}}$

3. Con $f(x) = 3x - 1$, calcula:

a) $f(-2)$ — ***Sol.*** -7

b) $f(0)$ — ***Sol.*** -1

c) $f(x + 1)$ — ***Sol.*** $3x + 2$

d) $3f(x)$ — ***Sol.*** $9x - 3$

4. Con $f(x)=\dfrac{2}{x}$, calcula:

a) $f(-1)$ — ***Sol.*** -2

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ — ***Sol.*** 4

c) $\dfrac{f(5)}{f(x)}$ — ***Sol.*** $\dfrac{x}{5}$

d) $f(x - 1)$ — ***Sol.*** $\dfrac{2}{x-1}$

II. Señala si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

1. $g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ — ***Sol.*** Par.

2. $f(t) = t^2 + 2t + 3$ — ***Sol.*** No es par ni impar.

3. $f(x) = 2x^3 - 5x$ — ***Sol.*** Impar.

4. $f(x) = x^2 - 5x + 1$ — ***Sol.*** No es par ni impar.

III. Si f es la función definida por $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ y g es la función definida por $g(x) = x^2 + x$, determina:

1. $(f + g)(x)$ — ***Sol.*** $4x^2 + 6x + 2$
2. $(f - g)(x)$ — ***Sol.*** $2x^2 + 4x + 2$
3. $(f - g)(x)$ — ***Sol.*** $3x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 2x$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ — ***Sol.*** $3 + \dfrac{2x+2}{x^2+x}$

IV. Señala si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes.

1. $F(x) = 5x - 2$ — ***Sol.*** Creciente.
2. $g(x) = -x + 4$ — ***Sol.*** Decreciente.

V. Si $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 - 5$, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$ — ***Sol.*** $x^2 - 8$

b) $(g \circ g)(x)$ — ***Sol.*** $x^4 - 10x^2 + 20$

VI. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 3$, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$ — ***Sol.*** $\sqrt{x^2+3}$

b) $(g \circ f)(x)$ — ***Sol.*** $x + 3$

Ejercicios de repaso

I. Relaciones.

Dados los conjuntos y la proposición abierta para cada caso, calcula el conjunto solución y señala el dominio y el contradominio.

1. $A = \{5, 8\}$; $B = \{6, 7, 8\}$ "x menor que y"

Sol. $R = \{(5, 6), (5, 7), (5, 8)\}$
Dominio $= \{5, 8\}$
Contradominio $= \{6, 7, 8\}$

2. $A = \{2, 3\}$; $B = \{3, 4\}$ "x igual y"

Sol. $R = \{(3, 3)\}$
Dominio $= \{2, 3\}$
Contradominio $= \{3, 4\}$

3. $D = \{1, 3, 5\}$; $E = \{1, 2\}$ "x mayor que y"

Sol. $R = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\}$
Dominio $= \{1, 3, 5\}$
Contradominio $= \{1, 2\}$

4. $P=\{1, 2, 3, 4\}$; $O=\{4, 6\}$ "x mitad de y"

Sol. $R=\{(2, 4), (3, 6)\}$
Dominio $=\{1, 2, 3, 4\}$
Contradominio $=\{4, 6\}$

5. $A=\{5, 6\}$; $G=\{6, 7, 8, 9\}$ "x menor que y"

Sol. $R=\{(5, 6), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (6, 7), (6, 8), (6, 9)\}$
Dominio $\{5, 6\}$
Contradominio $\{6, 7, 8, 9\}$

6. $G=\{2, 4, 6\}$; $H=\{4, 6, 8, 10\}$ "x doble que y"

Sol. $R=\phi$

7. Determina si la terna (B, D, g) es una función; si lo es, define de qué tipo. Explica las razones que te permiten llevar a esa conclusión.

$Df=\{1, 2, 3\}$
$Cf=\{5, 6, 7$
Regla de correspondencia:
$g(1)=7$
$g(2)=6$
$g(3)=5$

Sol. Es una función biyectiva.

II. Identifica los siguientes intervalos y represéntalos en una gráfica.

1. $x \leq 0$ **Sol.** Infinito.
2. $5 < x < 7$ **Sol.** Abierto.
3. $-2 \leq x\ 0$ **Sol.** Cerrado.
4. $-1 \leq x < 2$ **Sol.** Semiabierto.
5. $x < 2$ **Sol.** Infinito.
6. $x < 0$ **Sol.** Infinito.

III. Realiza las siguientes operaciones.

1. $F(y)=\dfrac{1}{y}$, comprueba que $F(y-k)-F(y)=\dfrac{k}{y^2-yk}$
2. $G(x)=4x$, comprueba que $G(x+1)-G(x)=3G(x)$
3. $G(x)=bx$, comprueba que $G(x)\cdot G(h)=G(x+h)$
4. $g(x)=\sqrt{2x+5}$, determina:

a) $g(-1)$ **Sol.** $\sqrt{3}$

b) $g(2x+5)$ **Sol.** $\sqrt{4x+15}$

c) $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ con $h \neq 0$ **Sol.** $\dfrac{2}{\sqrt{2x+2h+5}+\sqrt{2x+5}}$

IV. En las siguientes expresiones y es la variable dependiente. Indica si se define una función. Considera los $R \to R$.

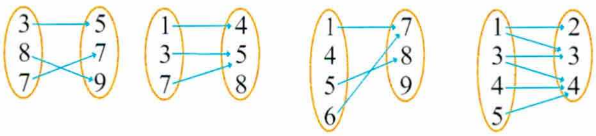
1. $y = \sqrt[3]{5x}$ **Sol.** Sí

2. $y = \pm\sqrt{x}$ **Sol.** No

3. $y = \pm\sqrt{x+1}$ **Sol.** Sí

V. De los siguientes diagramas, ¿cuáles definen una función y de qué tipo son?

a) b) c) d)



Sol. Biyectiva

Sol. Invectiva

Sol. No

Sol. No

VI. En los siguientes ejercicios define el dominio que consideres adecuado para que las expresiones sean funciones.

1. $J(x) = \sqrt{-x}$ **Sol.** Todos los R negativos

2. $F(x) = \sqrt{x-1}$ **Sol.** Todos los $R \geq 1$

3. $g(x) = 2x^2$ **Sol.** Todos los R

4. $y = \sqrt{x-3}$ **Sol.** Todos los $R \geq 3$

VII. Determina si la terna (A, B, f) es una función. Si lo es, define de qué tipo.

$Af = \{3, 4, 5, 6\}$

$Bf = \{7, 8, 9\}$

Regla de correspondencia:

$f(3) = 7$

$f(4) = 7$

$f(5) = 8$

$f(6) = 9$ **Sol.** Función sobreyectiva

VIII. Resuelve las siguientes operaciones.

1. Con $f(x) = x^2 + 3x - 2$, calcula:

   a) $f(x^2 - 1)$ **Sol.** $x^4 + x^2 - 4$

   b) $f(x) + f(h)$ **Sol.** $x^2 + 3x + h^2 + 3h - 4$

   c) $\dfrac{f(x-h) - f(x)}{h}$ cuando $h \neq 0$ **Sol.** $-2x + h - 3$

2. Con $F(x) = \sqrt{x+4}$, calcula:

   a) $F(-2)$ **Sol.** $\sqrt{2}$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **Sol.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

c) $F(x+4)$ **Sol.** $\sqrt{x+8}$

3. Si $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+1}$, determina:

a) $f(0)$ **Sol.** $\sqrt{2}$

b) $f(3a)$ **Sol.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

c) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ **Sol.** $\sqrt{x+8}$

4. Si $f(x) = 2x$, determina:

a) $f(3)$ **Sol.** 6

b) $f(0)$ **Sol.** 0

c) $\frac{f(x+3)}{f(x-1)}$ **Sol.** $\frac{x+3}{x-1}$

IX. Señala si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

1. $f(x) = x^2 - 3$ **Sol.** Par.
2. $h(x) = x^6 + 2$ **Sol.** Par.
3. $h(t) = 3t^7 + 1$ **Sol.** No es par ni impar

X. Si $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = x + 1$, calcula:

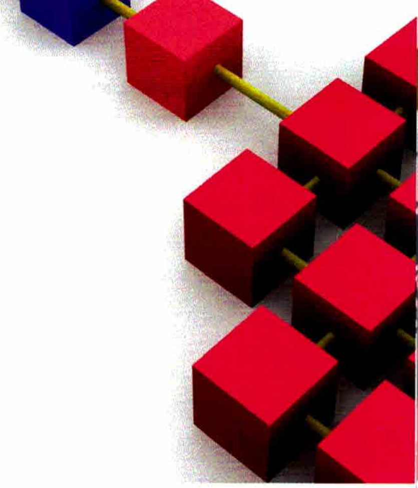
1. $(f \circ g)(x)$ **Sol.** $3x^2 + 6x + 5$
2. $(f \circ f)(x)$ **Sol.** $27x^4 + 36x^2 + 14$
3. $(g \circ g)(x)$ **Sol.** $x + 2$
4. $(g \circ f)(x)$ **Sol.** $3x^2 + 3$

XI. Si $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x)=\frac{1}{x}$, calcula:

1. $(f \circ g)\,(x)$ **Sol.** $\frac{1-x}{1+x}$
2. $(g \circ g)\,(x)$ **Sol.** x

XII. Si $f(x)= x^2 + 2$ y $g(x)= x + 1$, calcula:

1. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **Sol.** $x-1+\frac{3}{x+1}$
2. $(g \circ g)(x)$ **Sol.** $x + 2$
3. $(f \circ g)(x)$ **Sol.** $x^2 + 2x + 3$
4. $(f \circ f)(x)$ **Sol.** $x^4 + 4x^2 + 6$
5. $(g \circ f)\,(x)$ **Sol.** $x^2 + 3$



Capítulo 2

Límites

Límite de una sucesión

A. Si tomamos una cantidad variable x, a la que le asignamos los siguientes valores, se forma una sucesión de números crecientes:

$$1, 2, 3, 3.5, 3.9, 3.99, 3.999, 3.9999...$$

Es posible que esta misma variable tome valores decrecientes:

$$5, 4.2, 4.1, 4.01, 4.001, 4.0001...$$

Al analizar los ejemplos anteriores observamos que la variable x tiende a una constante a, en este caso 4, como un *límite*. Se dice entonces que la variable se aproxima al límite 4; es decir, que x tiende a 4. Este razonamiento se expresa así:

$$x \to 4 \quad \text{o} \quad \text{lím}\, x = 4$$

Vemos cómo poco a poco la diferencia de valores de x con a se reduce y siempre es posible obtener una diferencia tan pequeña como se quiera.

B. Se dice que la variable x se hace infinita cuando llega a ser mayor en valor absoluto que cualquier otro número dado, no importa qué tan grande sea.

La sucesión de los números naturales 1, 2, 3, 4... n, $n + 1$... no tiene límite, pero como se mantiene mayor que un número natural cualquiera, por grande que se tome, se indica para estos casos que la sucesión tiende a más infinito.

Si los valores de x se conservan positivos, se escribe $x \to +\infty$ y si se conservan negativos $x \to -\infty$.

C. Los símbolos $\infty, +\infty, -\infty$ no deben considerarse como números porque se utilizan para indicar un cierto comportamiento de una variable o de una función y se emplean sólo por conveniencia.

D. Cuando una variable toma valores cada vez más pequeños y se acerca a cero, decimos que la variable es infinitamente pequeña. Esto se expresa así:

$$x \to 0 \quad \text{o} \quad \text{lím}\, x = 0$$

Observa el ejemplo siguiente:

$$1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001...$$

En este caso aceptamos que su valor tiende a cero.

Límite de una función

Ahora nos interesa analizar el comportamiento de una variable cuando su valor se aproxima a una constante dentro de una función.

Ejemplo:

1. Si tenemos la función $x - y - 2 = 0$ y queremos analizarla cuando $x \to 3$, debemos escribirla en su forma explícita:

$$y = x - 2$$

La variable independiente es x y la dependiente y. Tabulamos y asignamos valores a x que se aproximen a 3, por la izquierda y por la derecha (piensa en el número 3 situado en la recta numérica).

Valores por la izquierda son crecientes

x	y
2	0
2.9	0.9
2.99	0.99
2.999	0.999
$x \to 3$	$y \to 1$

Observa

Valores por la derecha son decrecientes

x	y
4	2
3.1	1.1
3.01	1.01
3.001	1.001
$x \to 3$	$y \to 1$

Para este ejemplo se dice que el límite de la función $y = x - 2$ cuando x tiende a 3 es 1, esto se expresa así:

$$\lim_{x \to 3}(x - 2) = 1$$

Podríamos continuar analizando el comportamiento de la variable para otro valor que le asignáramos, en este caso cualquiera de los números reales puesto que no se estableció ningún intervalo para el dominio de la variable.

Ejemplo:

1. Calcula el límite de la función que se presenta a continuación y tabula con los valores que se asigne a la variable independiente cuando $x \to 2$.

$$y = \frac{x^2 - 2}{x - 3}$$

Se expresa $y = \dfrac{x^2 - 2}{x - 3}$

$x \to 2$

Solución:

Tabulamos:

Valores por la izquierda

x	y
1	.5
1.9	−1.46
1.99	−1.94
$x \to 2$	$y \to -2$

Valores por la derecha

x	y
3	No hay
2.1	−2.67
2.01	−2.06
$x \to 2$	$y \to -2$

La solución es $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x-3}=-2$

Conclusión:

Cuando $f(x)$ tiende hacia un límite, por ejemplo H, a medida que x tiende hacia el punto a, se expresa en la forma siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)=H$$

Concepto de límite

Cuando una variable x se aproxima cada vez más a una constante a, de tal manera que la diferencia $x-a$, en valor absoluto, puede ser tan pequeña como se quiera, se dice que la constante a es el límite de la variable x.

Esta idea se expresa así:

$$x \to a \text{ o también } x = a$$

Proposiciones para el cálculo de límites (teoremas)

Sería muy complicado resolver todos los problemas de límites tabulando la función para sucesiones de valores de la variable independiente.

Por ello, a continuación analizaremos algunas proposiciones que nos permitirán resolver problemas de límites por sustitución directa.

A. El límite de una constante c, cuando x tiende al valor a es la constante.

Efectivamente, el valor de la constante siempre será el mismo, sin que la alteren los valores que asignemos a la variable independiente.

Ejemplo:

1. Obtener el límite de 7 cuando x tiende a 2. Esto se expresa así:

$$\lim_{x\to 2} 7$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} 7 = 7$$

B. El límite de x cuando x tiende al valor a es a.

Ejemplo:

1. Obtener el límite de x cuando x tiende a 3. Esto se expresa así:

$$\lim_{x\to 3} x$$

Solución:

$$\lim_{x\to 3} x = 3$$

C. El límite de la suma de un número finito de funciones cuando x tiende al valor a es igual a la suma de sus límites.

Ejemplo:

1. Calcula el límite de $x + 2$ cuando x tiende a 4. Esto se expresa así:

$$\lim_{x\to 4}(x+2)$$

Solución:

$$\lim_{x\to 4}(x+2)=\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}2=4+2=\ 6$$

D. El límite del producto de un número finito de funciones cuando x tiende al valor a es igual al producto de sus límites.

Ejemplo:

1. Determina el límite de $4x^2$ cuando x tiende a 5. Esto se expresa así:

$$\lim_{x\to 5}4x^2$$

Solución:

$$\lim_{x\to 5}4x^2=\lim_{x\to 5}4\cdot\lim_{x\to 5}x\cdot\lim_{x\to 5}x=(4)(5)(5)=\ 100$$

E. El límite del cociente de dos funciones cuando x tiende al valor a es igual al cociente de sus límites, siempre y cuando el límite del denominador no sea igual a cero.

Ejemplo:

1. Determina el límite de $\dfrac{3x+4}{2x+1}$ cuando x tiende a 2. Esto se expresa así:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{2x+1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}2x+\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{6+4}{4+1}=\ 2$$

Nota: recuerda que en los números reales no existe la división entre cero. Si al realizar las sustituciones el denominador es cero, la función puede o no tender hacia un límite.

F. Conclusión

Para calcular el límite de un polinomio entero en x cuando $x\to a$, obtenemos por sustitución directa el valor de la expresión para $x = a$.

Ejemplo:

1. Obtener el límite de $2x^2 + 5x - 2$ cuando x tiende a 3.

Se expresa:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2+5x-2)$$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2+5x-2)=2(3)^2+5(3)-2=18+15-2=\ 31$$

¡Aplícate!

I. Concepto de límite.

1. ¿Cuál es el límite de las sucesiones siguientes?

   a) 5, 5.9, 5.99, 5.999... **Sol.** 6

   b) 3, 3.39, 3.399, 3.3999... **Sol.** 3.4

II. Tabula para los valores que asigne a la variable independiente por la izquierda y por la derecha, y calcula el límite de cada una de las funciones siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x-1)$ **Sol.** 9

2. $\lim\limits_{x\to 1} x^2-4$ **Sol.** -3

III. Aplica la sustitución directa y calcula los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 3} x$ **Sol.** 3

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} x$ **Sol.** $\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} x$ **Sol.** $-\frac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} 4$ **Sol.** 4

5. $\lim\limits_{x\to -1} \pi$ **Sol.** π

Límites de otro tipo

Cuando la variable x tiende a cero, o bien a ∞, se obtienen, en algunos casos, los siguientes resultados, en los que $c \in R$ con $c \neq 0$.

A. Cuando $x \to 0$

1) Límite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{c}$ **Solución:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{c}=0$ En forma simplificada: $\frac{0}{c}=0$

2) Límite: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{x}$ **Solución:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{x}=$ no existe En forma simplificada: $\frac{c}{0}=$ No existe lím

B. Cuando $x \to \infty$

1) Límite: $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x}{c}$ **Solución:** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x}{c}=\infty$ En forma simplificada: $\frac{\infty}{c}=\infty$

2) Límite: $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{c}{x}$ **Solución:** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{c}{x}=0$ En forma simplificada: $\frac{c}{\infty}=0$

3) Límite: $\lim\limits_{x\to \infty} c+x$ **Solución:** $\lim\limits_{x\to \infty} c+\infty=\infty$ En forma simplificada: $c+\infty=\infty$

4) Límite: $\lim\limits_{x\to \infty} cx$ **Solución:** $\lim\limits_{x\to \infty} cx=\infty$ En forma simplificada: $c\infty=\infty$

En las soluciones del inciso B, al leer el signo "es igual a" debemos pensar "que tiende a infinito".

Al aplicar los razonamientos "no existe límite", "diverge", "infinito", nos referimos a un mismo significado.

Ejemplos:

Calcula los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{(x-2)^2}$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{(x-2)^2}=\dfrac{5}{0}$ No existe lím

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)=-\dfrac{3}{0}$ No existe lím

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3}$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3}=\dfrac{0}{3}=0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=\dfrac{5}{\infty}=0$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-8x+15)$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-8x+15)=\infty+15=\infty$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x-4)$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to -3}(3x^2+x-4)=\infty-4=\infty$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x+3}$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{5}{0}$ No existe lím

8. $\lim\limits_{g\to 0}\dfrac{5g^3-6}{2g^4+3g}$ **Sol.** $\lim\limits_{g\to 0}\dfrac{5g^3-6}{2g^4+3g}=-\dfrac{6}{0}$ No existe lím

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}$ **Sol.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

10. $\lim\limits_{g\to\infty}g^3$ **Sol.** $\lim\limits_{g\to\infty}g^3=\infty$

Formas indeterminadas

En algunos casos, los más frecuentes en un examen, al remplazar x por un número determinado a, la función $f(x)$ adopta algunas veces las formas $\dfrac{0}{0}$ o de $\dfrac{\infty}{\infty}$, expresiones que como no representan ningún valor determinado se le llama a cada una *indeterminada*.

En ocasiones es posible evitar esta indeterminación, ya que la función $f(x)$ puede tener un límite a medida que $x \to a$. Este límite se obtiene, para algunos ejercicios, transformando la función en otra igual a ella para todo valor de x, excepto para $x = a$.

A. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

En la sección *Límites de otro tipo* señalamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{c}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}=0 \quad \text{No existe límite.}$$

En algunos casos, con la sustitución directa se obtiene como resultado $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Para evitarla y según proceda, podemos factorizar, racionalizar el numerador y el denominador o bien, sustituir la relación trigonométrica por otra equivalente.

Ejemplo:

1. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0} \quad \text{Indeterminada}$$

Tratamos de evitar la indeterminación así:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

Para obtener:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

En este caso, la indeterminación es evitable si asignamos a la función

$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ el valor $f(3)=6$ cuando $x=3$.

Establecemos otra proposición para el cálculo de límites: si dos funciones son iguales, para todo valor de x (excepto de $x=a$) y una de ellas tiene límite cuando $x\to a$, la otra tiene el mismo límite cuando $x\to a$.

Continuando con el ejemplo anterior, tabularemos para observar el desarrollo de la función cuando $x\to 3$.

Ya establecimos que $\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$. Para poder tabular hacemos:

$$y=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$$

Analizamos lo antes expuesto:

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
1	4
2	5
3	No está definida
4	7

x	$x+3$
1	4
2	5
3	6
4	7

Podríamos decir que la expresión $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-9}$ está "disfrazada", ya que una vez que se realizaron las operaciones necesarias es igual a $x+3$.

Concluimos que las dos funciones son iguales para todo valor, excepto para $x=3$, en que la primera no está definida.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-x^2}{2x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-x^2}{2x}=\frac{0}{0}\quad \text{Indeterminada}$$

Factorizamos el numerador y obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-x^2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(5x-1)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5x-1)}{2}=\frac{0}{2}=\ 0$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}\quad \text{Indeterminada}$$

Trataremos de evitar la indeterminación y racionalizaremos el numerador. Para lograrlo, aplicaremos el binomio conjugado.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\ \frac{1}{2}$$

3. $\lim\limits_{\theta\to 0^\circ}\dfrac{5\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0^\circ}\dfrac{\lim\limits_{\theta\to 0^\circ}\operatorname{sen}\theta}{\lim\limits_{\theta\to 0^\circ}\tan\theta}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminada

Como la relación trigonométrica es $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, sustituimos:

$$\lim_{\theta\to 0^\circ}\frac{5\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}=\lim_{\theta\to 0^\circ}\frac{5\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\lim_{\theta\to 0^\circ}5\cos\theta=5(1)=\ 5$$

B. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

En la sección Límites de otro tipo señalamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{c}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$$

En algunos casos, una vez hecha la sustitución directa cuando $x\to\infty$, se obtiene como resultado $\frac{\infty}{\infty}$. Para evitar esta indeterminación, dividimos ambos términos por la potencia más alta de x que entra en la función.

Si los grados del numerador y denominador son iguales, entonces una vez que se realiza la operación anterior, el límite será distinto de cero.

Ejemplo:

1. Calcula el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-1}{5x^3+3x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-1}{5x^3+3x+2}=\frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminada}$$

Para evitar la indeterminación, dividimos el numerador y el denominador entre x^3, que es la máxima potencia de x y obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{3-0-0}{5+0+0}=\frac{3}{5}$$

No en todos los casos es posible evitar la indeterminación. Observa lo siguiente:

Ejemplo:

1. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-6}{x+1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-6}{x+1}=\frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminada}$$

Tratamos ahora de evitar la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-6}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0-0}{\frac{1}{0}+\frac{1}{0}}=\frac{1}{0} \text{ No hay límite}$$

C. Evaluación de límites usando la *notación funcional.*

Ejemplo:

1. Si $f(x)=4x^3$; calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2)}{x}$

Observa cómo se hace la sustitución directa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}=\frac{f(2)-f(2)}{0}=\frac{0}{0}\quad \text{Indeterminada}$$

Tratamos de evitarla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(2+x)^3-4(2)^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(8+12x+6x^2+x^3)-32}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{32+48x+24x^2+4x^3-32}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(48+24x+4x^2)}{x}=48$$

¡Aplícate!

I. Resuelve los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ — ***Sol.*** 4

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2+5}{2x-1}$ — ***Sol.*** No existe lím

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ — ***Sol.*** 2

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-4x+2}{x+5}$ — ***Sol.*** $\dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}$ — ***Sol.*** $\dfrac{3}{7}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ — ***Sol.*** 6

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+3}{3}$ — ***Sol.*** ∞

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3-2x^2-4}{6x^3+3x+2}$ — ***Sol.*** $\dfrac{2}{3}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7}{x^3}$ — ***Sol.*** 0

II. Evalúa los siguientes límites mediante la notación funcional.

1. Si $f(x) = 2x^2 + 3$, calcula $\lim_{x\to 0} \frac{f(5+x)-f(5)}{x}$ **Sol.** 20

2. Si $f(x)=x^2 - 2$, calcula $\lim_{x\to 0} \frac{f(-3+x)-f(-3)}{x}$ **Sol.** -6

3. Si $f(x) = 4x^3$; calcula $\lim_{x\to 0} \frac{f(2+x)-f(3)}{x}$ **Sol.** No hay lím

Ejercicios de repaso

I. Tabula para los valores que asigne a la variable independiente por la izquierda y por la derecha, y calcula el límite de las siguientes funciones:

1. $\lim_{x\to 3} x-3$ **Sol.** 0

2. $\lim_{x\to 1}(5x^2+1)$ **Sol.** 6

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ **Sol.** 2

II. Aplica la sustitución directa y calcula los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to -2} x^3$ **Sol.** -8

2. $\lim_{x\to 4}\frac{3x+7}{x+1}$ **Sol.** $\frac{19}{5}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{6x^2-3x+2}{4x-3}$ **Sol.** $-\frac{2}{3}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-4}{x^2+2}$ **Sol.** -2

5. $\lim_{x\to 1}(4x^2-5x+6)$ **Sol.** 5

6. $\lim_{x\to -1} 6x^2-4x+2$ **Sol.** 12

7. $\lim_{x\to b}\frac{(x+b)(2x+h)}{x+b}$ **Sol.** $2b+h$

8. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{3-x}$ **Sol.** -4

9. $\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^2-4}{x}$ **Sol.** 4

10. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{6x-1}{x}$ **Sol.** 4

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5}{x^2-2}$ **Sol.** 3

12. $\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{x^2k+3xk^2+k^2}{2xk+5k^2}$ **Sol.** $\dfrac{x}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}}$ **Sol.** 2

14. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x-3}$ **Sol.** $-\dfrac{2}{3}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-6}{x^2-9}$ **Sol.** 0

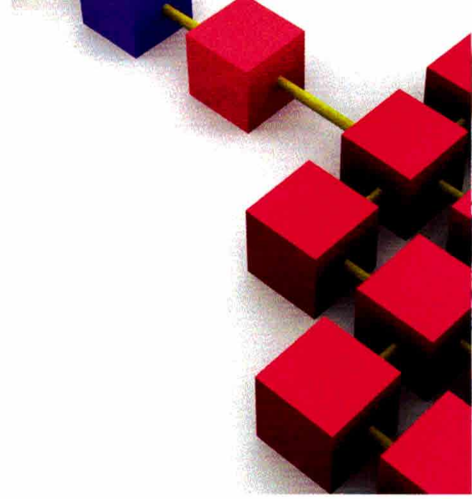
III. Evalúa los siguientes límites mediante la notación funcional.

1. Si $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(-2+x)-f(-2)}{x}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{9}$

2. Si $f(x)=3x^2-1$, calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(4+x)-f(4)}{x}$ **Sol.** 24

3. Si $f(x)=x^2$, calcula $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **Sol.** $2x$

4. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$, calcula $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{x^2}$



Capítulo 3

Continuidad y discontinuidad

Introducción

En un problema sobre continuidad podemos:

Primero. Determinar si una función $f(x)$ es continua o discontinua en un punto dado.

Segundo. Determinar en qué puntos una función $f(x)$ es discontinua.

Conceptos clave

Función continua
Función discontinua
Discontinuidad evitable

Continuidad y discontinuidad

A. Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si:

1) Existe $f(a)$

2) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

B. Una función $f(x)$ es discontinua para $x = a$ si no satisface las condiciones de continuidad.

Ejemplos:

1. Determina si la función $f(x) = x^2 + 1$ es continua en $x = 5$.

Solución:

Primero analizamos si la función cumple las condiciones de continuidad:

$f(x) = x^2 + 1$

1) $f(5) = 5^2 + 1 = 26$

2) $\lim\limits_{x\to 5} x^2 + 1 = 26$

3) Como se cumple que:

$\lim\limits_{x\to 5} x^2 + 1 = f(5)$

La función $f(x) = x^2 + 1$ es continua en $x = 5$.

2. Determina si la función $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ es continua para $x = 2$.

Solución:

Primero analizamos si la función cumple las condiciones de continuidad:

$$f(x)=\frac{3}{x-1}$$

1) $f(2)=\frac{3}{2-1}=\frac{3}{1}=3$

2) $\lim\limits_{x\to 2}=\frac{3}{x-1}=\frac{3}{1}=3$

3) Como se cumple que:

$$\lim_{x\to 2}=\frac{3}{x-1}=f(2)$$

La función $f(x)=\frac{3}{x-1}$ es continua para $x=2$.

3. Determina si la función $f(x)=\frac{4}{x-1}$ es continua en $x=1$.

Solución:

Primero analizamos si la función cumple las condiciones de continuidad:

$$f(x)=\frac{4}{x-1}$$

1) $f(1)=\frac{4}{1-1}=\frac{4}{0}$ No está definido

2) $\lim\limits_{x\to 1}=\frac{4}{x-1}=\frac{4}{0}$ No existe

Al llegar a este resultado ya no es necesario continuar con el análisis.

La función $f(x)=\frac{4}{x-1}$ no es continua para $x=1$.

4. Determina si la función $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ es continua para $x=3$.

Solución:

Primero analizamos si la función cumple las condiciones de continuidad:

$$f(x)=\sqrt{5-x^2}$$

1) $f(3)=\sqrt{5-3^2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2\ i$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{5-x^2}=\pm\sqrt{5-3^2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2\ i$

No es necesario continuar el análisis porque el resultado de $f(3)$ y el del límite es un número imaginario.

La función $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ no es continua para $x=3$.

Discontinuidad evitable

En algunos casos la discontinuidad es evitable asignando a la función otro valor para $f(a)$.

Ejemplo:

1. Determina si la función $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ es continua en $x=4$.

Solución:

Primero analizamos si la función cumple las condiciones de continuidad:

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$$

1) $f(4)=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{0}{0}$ No está definido

2) $\lim\limits_{x\to 4}=\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{0}{0}$ Indeterminada

De acuerdo con lo que señalamos en el tema de límites, desarrollamos la función para evitar la indeterminación:

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4$$

Ahora analizamos nuevamente la función para determinar si cumple con las condiciones de continuidad.

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}=x+4$$

1) $f(4) = 4 + 4 = 8$

2) $\lim\limits_{x\to 4}=\frac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}x+4=8$

3) Como se cumple que:

$$\lim_{x\to 4}=\frac{x^2-16}{x-4}=f(4)$$

Observa que la expresión estaba disfrazada.

Conclusión:

En este caso, la discontinuidad es evitable porque si asignamos a la función $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ el valor $f(4) = 8$ cuando $x = 4$, ya es continua.

En el ejemplo $f(x)=\frac{4}{x-1}$, que analizamos en el párrafo anterior, la discontinuidad que se presentó no se pudo evitar porque no es posible sustituir la expresión $\frac{4}{x-1}$ por otra equivalente que sea continua.

Una función $f(x)$ es continua en un intervalo si es continua para todos los valores de x comprendidos en él. Una función es discontinua si se produce alguna discontinuidad para algún valor de x en el intervalo.

Determinación de los puntos de discontinuidad de una función *f*(*x*)

En algunos casos es necesario, dada una función $f(x)$, determinar los puntos de discontinuidad. Para ello, tomamos en consideración las proposiciones (teoremas) siguientes:

A. Un polinomio entero en x es una función continua para todos los valores de la variable x.

B. La suma, diferencia y producto de funciones continuas es una función continua.

C. Las funciones racionales son continuas para todos los valores de x que no anulen al denominador.

Ejemplos:

1. Determina los puntos de discontinuidad de la función $y = x^2 - 5x$.

No hay ningún punto de discontinuidad porque con base en la proposición A, la función es continua para todo valor que asignemos a la variable x.

2. Determina si la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ es continua o no en todo su dominio $-6 < x < 5$.

Enunciando de otra forma la proposición C, indica que las funciones son discontinuas para los valores de x que anulan el denominador. De ahí que ahora resulte necesario recordar que un polinomio se anula al sustituir la variable por el valor de sus raíces (lo usamos al comprobar ecuaciones).

Continuemos con el ejercicio:

Solución:

Primero calculamos las raíces:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$
$$x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

Analizamos para determinar si la función cumple con las condiciones de continuidad en $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \text{ para } x_1 = 2$$

1) $f(2) = \dfrac{1}{2^2 - 4} = \dfrac{1}{0}$ No está definido

2) $\lim\limits_{x \to 2} = \dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{0}$ No existe

Al llegar a este resultado ya no continuamos con el análisis.

La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ no es continua para $x = 2$, ni para $x = -2$ (ya que al elevar al cuadrado -2 se obtiene 4 y el análisis es igual al realizado para $x = 2$).

3. Determina los valores de x para los cuales la función que se da a continuación, no es continua.

$$G(x) = \frac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$$

Solución:

Con base en la proposición C, las funciones racionales son continuas para todos los valores de x que no anulan el denominador.

Los valores que anulan el polinomio $x^2 - 7x + 6$ son sus raíces.

Cálculo de las raíces:

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$

$x_1 = 6; x_2 = 1$

Primero analizamos para determinar si la función cumple con las condiciones de continuidad en $x_1 = 6$ y $x_2 = 1$:

$G(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$ para $x_1 = 6$

1) $f(6) = \dfrac{6+1}{6^2 - 7(6) + 6} = \dfrac{7}{42 - 42} = \dfrac{7}{0}$ No está definida

2) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x-1}{x^2 - 7x + 6} = \dfrac{6+1}{42-42} = \dfrac{7}{0}$ No existe

Al encontrar este resultado ya no continuamos el análisis.

$G(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 7x + 6}$ para $x_2 = 1$

1) $f(1) = \dfrac{1+1}{1 - 7 + 6} = \dfrac{2}{0}$ No está definida

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2 - 7x + 6} = \dfrac{1+1}{1-7+6} = \dfrac{2}{0}$ No existe

Al encontrar este resultado ya no continuamos con el análisis.

No es continua para $x = 6$, ni para $x = 1$.

4. Determina los valores de x para los cuales la función $G(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ es continua.

Solución:

Con base en la proposición C, las funciones racionales son continuas para todos los valores que no anulen el denominador.

El valor que anula al binomio $x - 4$ es su raíz.

Cálculo de la raíz:

$x - 4 = 0$

$x = 4$

Primero analizamos para determinar si la función cumple con las condiciones de continuidad en $x = 4$:

$G(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

1) $G(4)=\dfrac{16-16}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ No está definida

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\dfrac{16-16}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminada

Debemos tratar de evitar la indeterminación:

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4=4+4=8$

En el punto $x=4$ se presenta una discontinuidad evitable si asignamos a la función $G(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ el valor $G(4)=8$ cuando $x=4$, ya es continua.

Ejercicios de repaso

I. Determina si las funciones $f(x)$ que se dan a continuación son continuas para los puntos indicados en cada caso. Realiza la comprobación correspondiente.

a) $y=x^3-8$ en $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=2$ **Sol.** Sí, sí.

b) $y=\dfrac{1}{x}$ en $x=-1$ y $x=0$ **Sol.** Sí, no.

II. Determina los puntos de discontinuidad en las funciones siguientes:

a) $y=x^2+3x$ **Sol.** Ninguno

b) $y=\dfrac{x-2}{x^2-9}$ **Sol.** ± 3

c) $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+4x+3}$ **Sol.** $-3, -1$

d) $y=\dfrac{3x-4}{x^2-36}$ **Sol.** ± 6

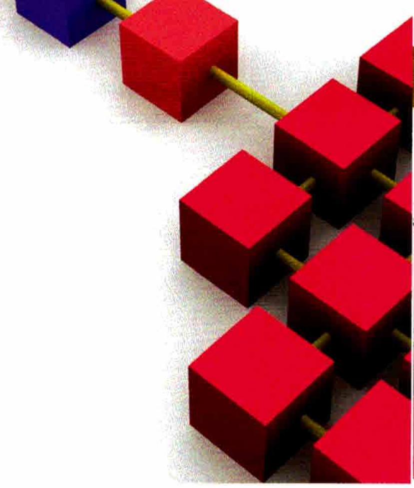
e) $y=\dfrac{2}{x^2-27}$ **Sol.** ± 3

f) $y=\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{2}{x-1}$ **Sol.** $-3, 1$

III. Determina para cada una de las funciones que se indican a continuación si son continuas en todo su dominio.

a) $f(x)=\dfrac{x-6}{x^2-2x-8}$ para $-2<x<6$ **Sol.** No es continua.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ para $0<x<4$ **Sol.** No es continua.



Capítulo 4

Concepto de derivada

Incremento

Si a la variable independiente x con un valor inicial a se le da un valor final b, a la diferencia $b - a$ se le llama incremento de la variable x. Esto se expresa usando la letra griega delta (Δ) antes de la variable:

$$\Delta x = b - a$$

Conceptos clave

Incremento de la variable *x*

Derivada

Ejemplos:

1. Determina el valor del incremento de la variable x con valor inicial $a = 4$ y valor final $b = 9$.

Solución:

$\Delta x = 9 - (4) = 9 - 4 = 5$

Si se registra un aumento de valor, el incremento es positivo.

2. Calcula el valor del incremento de la variable x con valor inicial $a = 3$ y valor final $b = 0$.

Solución:

$\Delta x = 0 - (3) = -3$

Si hay disminución de valor, el incremento es negativo.

$\Delta x = 4 - (4) = 4 - 4 = 0$

Si no hay diferencia, el incremento es nulo.

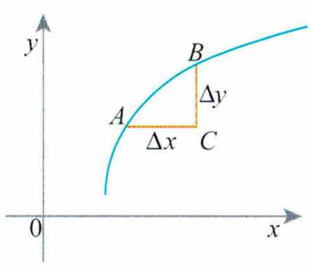
Incremento de una función

Si y está en función de x, tenemos:

$$y = f(x)$$

Cuando x recibe un incremento Δx, corresponde a la función un incremento Δy. Gráficamente se expresa así:

Sea el punto $B(x, y)$ de una curva cuya ecuación es de la forma $y = f(x)$:



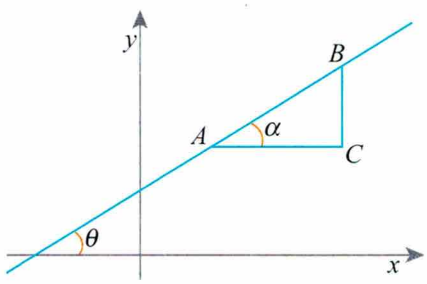
Los incrementos de x y de y son:

$$\Delta x = \overline{AC}\ ;\ \Delta y = \overline{BC}$$

Pendiente de una línea recta

En geometría analítica estudiamos el tema de la pendiente m de una línea recta. A partir de esto, concluimos que:

- La pendiente de toda recta paralela al eje x es cero.
- La pendiente de una recta que forma un ángulo θ entre $0° < \theta < 90°$ es positiva.
- Una recta paralela al eje y no tiene pendiente.
- Si la recta forma un ángulo θ entre $90° < \theta < 180°$ la pendiente es negativa.



En la siguiente representación, los ángulos α y θ son iguales por ser correspondientes. La pendiente m es:

$$m = \tan\theta$$

Si introducimos el concepto de incremento que vimos antes queda:

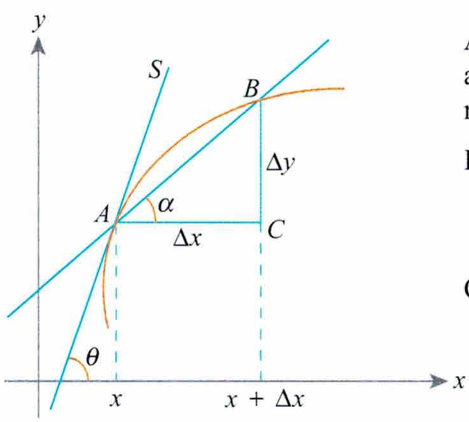
$$m = \tan\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pendiente de una curva. Interpretación geométrica

Si A y B son los puntos de una curva, la pendiente m de la recta AB que corresponde al ángulo α es:

$$m = \tan\alpha$$

Debemos observar que cuando el punto B se mueve sobre la curva hacia A, la recta AB gira sobre A hasta coincidir con la recta AS; esta recta AS es tangente a la curva en A.



A medida que B se aproxima a A, el Δx tiende a cero, y la pendiente de AB llegará a ser la misma de AS.

En consecuencia tenemos que:

$$m = \lim_{\alpha\to\theta}\tan\theta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Como los ángulos α y θ son iguales, entonces:

$$m = \tan\alpha = \tan\theta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Derivada

Si en la función $y = f(x)$, la razón $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un límite cuando $\Delta x \to 0$, a este límite se le llama derivada de y con respecto a x.

Concepto de derivada

La derivada de una función con respecto a una variable es el límite, del incremento de la función entre el incremento de la variable, cuando el incremento de la variable tiende a cero.

Se expresa así:

$$\text{Derivada} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuando el límite de la razón existe, se dice que la función tiene derivada.

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

Notación de la derivada

La derivada se expresa en cualquiera de las formas siguientes:

$Df(x)$ Cauchy

$f'(x)$ Lagrange

y' Lagrange

$\frac{dy}{dx}$ Leibnitz. Se lee "derivada de y con respecto a x"

De donde:

$$Df(x) = f'(x) = y'; \; \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Debemos acostumbrarnos a usar todas las notaciones para que se nos facilite la lectura de diferentes textos y porque cada una posee un uso cómodo, según el caso.

Regla general de la derivación

El proceso para obtener la derivada de una función $f(x)$, incluye:

1. Dar un incremento a x.
2. Expresar el incremento correspondiente de y.
3. Calcular el cociente de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Obtener el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Procedemos de la siguiente forma:

1. En la función sustituimos x por $x + \Delta x$ y desarrollamos. También debemos expresar el incremento de y.
2. Restamos algebraicamente de la función incrementada la función inicial, y desarrollamos.
3. Dividimos el incremento de la función Δy, entre el incremento de la variable independiente Δx, y desarrollamos.
4. Calculamos el límite del cociente anterior, cuando $\Delta x \to 0$. El límite que obtenemos es la derivada que tratamos de obtener.

Ejemplos:

1. Aplica la regla general de la derivación y calcula la derivada de la siguiente función:

$$y = 3x^2 + 4$$

1.
$$\begin{aligned} y+\Delta y &= 3(x+\Delta x)^2+4 \\ &= 3\left[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2\right]+4 \\ &= 3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+4 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y+\Delta y &= 3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+4 \\ -y \quad &= -3x^2 \qquad\qquad\qquad -4 \\ \Delta y &= 6x\Delta x+3(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

3.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6x\Delta x}{\Delta x}+\frac{3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x$$

4.
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x$$

Como por definición:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

La solución queda:

$$\frac{dy}{dx}= 6x$$

Este resultado se puede expresar con cualquiera de las notaciones. También la forma siguiente se utiliza para indicar la operación que se requiere para obtener la derivada respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(3x^2+4)=6x$$

Esto se lee "derivada de $3x^2 + 4$ con respecto a x es igual a $6x$".

Nota: algunos de los resultados se pueden obtener en forma directa sin necesidad de escribir todas las operaciones, como en el ejemplo siguiente.

2. Aplica la regla de los cuatro pasos para calcular la derivada de la siguiente función:

$$y=\frac{1}{x}$$

1. $y+\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}$

2. $\Delta y=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}=\dfrac{x-x-\Delta x}{x^2+x\Delta x}$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{\Delta x}{x^2+x\Delta x}\div\dfrac{\Delta x}{1}=-\dfrac{\Delta x}{\Delta x(x^2+x\Delta x)}=-\dfrac{1}{x^2+x\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x^2+x\Delta x}=-\dfrac{1}{x^2}$

Esto lo podemos expresar así:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

o también así:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

$$Df\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

$$y'=-\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

En este libro usaremos la notación de la derivada de Leibnitz: $\dfrac{dy}{dx}$

3. Aplica la regla de la derivación y calcula la derivada de la función

$y=x^3-x+2$

1. $y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)+2$

$\qquad =x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x-\Delta x+2$

2. $\Delta y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\Delta x$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-1$

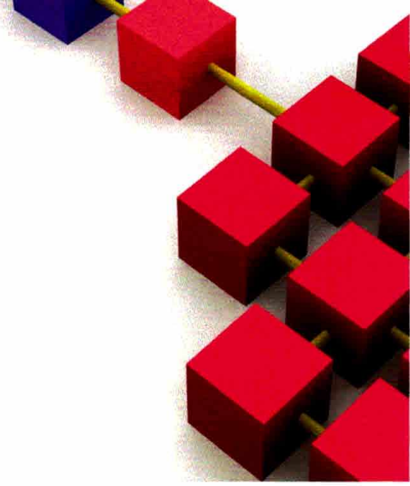
4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-1$$

Ejercicios de repaso

I. Aplica la regla de la derivación y calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes. Es indispensable que resuelvas todos los ejercicios.

1. $y = 3x$ **Sol.** 3
2. $y = 4x$ **Sol.** 4
3. $y = \dfrac{5x}{3}$ **Sol.** $\dfrac{5}{3}$
4. $y = -x$ **Sol.** -1
5. $y = -\dfrac{3}{2}x$ **Sol.** $-\dfrac{3}{2}$
6. $y = 3 - 5x$ **Sol.** -5
7. $y = 3x + 2$ **Sol.** 3
8. $y = x - 5$ **Sol.** 1
9. $y = \dfrac{x}{2} + 3$ **Sol.** $\dfrac{1}{2}$
10. $y = \dfrac{4}{3} - 5x$ **Sol.** -5
11. $y = x^2 - 2$ **Sol.** $2x$
12. $y = 3 - x^2$ **Sol.** $-2x$
13. $y = \dfrac{4}{x^2 + 2}$ **Sol.** $-\dfrac{8x}{(x^2 - 2)^2}$
14. $y = 5x^2 - x + 2$ **Sol.** $10x - 1$
15. $y = x^2 - 3x + 1$ **Sol.** $2x - 3$



Capítulo 5

Derivadas de funciones algebraicas

Introducción

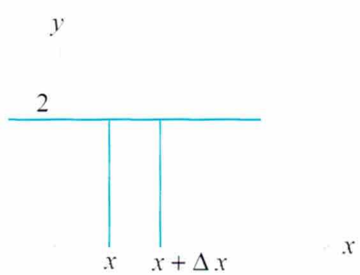
Por lo regular, la derivación se lleva a cabo aplicando fórmulas que se obtienen mediante la regla general de derivación. En este capítulo analizaremos estas operaciones.

Conceptos clave

- Derivada de una constante
- Derivada de la variable independiente
- Derivada de una suma de funciones
- Derivada de una constante por una función
- Derivada de un producto de dos funciones
- Derivada de la potencia de una función
- Derivada de un cociente de funciones
- Derivada de una función entre una constante
- Derivada de la raíz cuadrada de una función
- Derivada de la raíz cuadrada de *x* con respecto a sí misma

Derivada de una constante

Observa la figura. Si queremos obtener la derivada de $y = 2$ al incrementarse x, el valor de 2 no cambia.



En general tenemos:

Sea $y = c$, donde c es una constante.

Desarrollamos conforme a la regla de derivación:

1. Al incrementarse x, la constante c no cambia, y en consecuencia no cambia el valor de y.
2. De donde resulta $\Delta y = 0$
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

Como indicamos que $y = c$:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

La derivada de una constante respecto a x es cero.

Ejemplos:

Determina las derivadas de:

1. $y = 8$

2. $y = -\frac{2}{3}$

3. $y = \sqrt{3}$

Soluciones:

$y = 8$	$y = -\frac{2}{3}$	$y = \sqrt{3}$
$\frac{d}{dx}(8) = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$

Nota: los números que se citan a la derecha de cada fórmula te permitirán elaborar un formulario.

Derivada de la variable independiente

Sea $y = x$.

Desarrollamos:

1. $y + \Delta y = x + \Delta x$
2. $\Delta y = \Delta x$
3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

Como indicamos que $y = x$:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

La derivada de una variable con respecto a sí misma es igual a la unidad.

Ejemplo:

1. Deriva $y = x$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Derivada de una suma de funciones

Sea $y = u + v - w$ en donde: $y = f(x)$

$u = f(x)$

$v = f(x)$

$w = f(x)$

como y, u, v, w, están en función de x, cuando x se incrementa, entonces $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$, de donde:

1. $y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w)$

$$=u+\Delta u+v+\Delta v-w-\Delta w$$

2. $\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}-\dfrac{\Delta w}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta x}$

Observa que a medida que Δx tiende a cero $\dfrac{\Delta y}{\Delta x},\dfrac{\Delta u}{\Delta x},\dfrac{\Delta v}{\Delta x},\dfrac{\Delta w}{\Delta x}$ tienen por límite $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{du}{dx},\dfrac{dv}{dx},\dfrac{dw}{dx}$, de donde:

$$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx} \qquad \textbf{(3)}$$

La derivada con respecto a x de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma de sus derivadas.

Ejemplo:

1. Deriva $y=x+5$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x+5)=1$$

Derivada de una constante por una función

Sea $y=cu$, en donde: c es una constante

$y=f(x)$

$u=f(x)$

Como y y u están en función de x, cuando x se incrementa entonces $y+\Delta y$, $u+\Delta u$, de donde:

1. $y+\Delta y=c\,(u+\Delta u)$

$$=cu+c\Delta u$$

2. $\Delta y=c\Delta u$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=c\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=c\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

Observa que a medida que Δx tiende a cero, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ y $c\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ tienen por límite $\dfrac{dy}{dx}$ y $c\dfrac{du}{dx}$, de donde:

$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(4)}$$

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Ejemplos:

1. Deriva $y=\frac{3x}{5}$

Solución:

$$y'=\frac{3}{5}(1)=\frac{3}{5}$$

2. Deriva $y=\frac{x}{2}+5x+3$

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}+5=\frac{1+10}{2}=\frac{11}{2}$$

Derivada de un producto de dos funciones

Sea $y = uv$ donde: $y=f(x)$

$u=f(x)$

$v=f(x)$

como y, u, v, están en función de x, cuando x se incrementa entonces:

$y+\Delta y$, $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, de donde:

1. $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

$$=uv+u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v$$

2. $\Delta y=u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\overbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}^{0}$ como $\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta u\to 0$

de donde:

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(5)}$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo:

1. Deriva $y=(3-x)(2+x)$

Solución:

Señalamos u:

$u=3-x$

$$\frac{du}{dx}=-1$$

Señalamos v:

$v = 2 + x$

$\frac{dv}{dx} = 1$

Ahora aplicamos la fórmula **(5)**:

$y' = (3 - x)(1) + (2 + x)(-1)$

$y' = 3 - x - 2 - x$

$y' = 1 - 2x$

Nota: esta expresión también podemos derivarla término a término si la desarrollamos previamente. Esto lo haremos después de establecer la derivada de la potencia de una función.

Derivada de la potencia de una función

Sea $y = u^n$, en donde: $y = f(x)$

$u = f(x)$

$n =$ un número entero positivo

Como y y u están en función de x, cuando x se incrementa $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, de donde:

1. $y + \Delta y = (u + \Delta u)^n$

Según el teorema del binomio, desarrollamos el segundo miembro:

$$= u^n + nu^{n-1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}(\Delta u)^2 + \ldots$$

2. $\Delta y = nu^{n-1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}(\Delta u)^2 + \ldots$

Factorizamos en el segundo miembro Δu

$$\Delta y = \left[nu^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}\Delta u + \ldots\right]\Delta u$$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[nu^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}\Delta u + \ldots\right]\frac{\Delta u}{\Delta x}$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

de donde:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(6)}$$

La derivada de una función elevada a un exponente entero positivo es igual al producto del exponente por la función elevada a ese exponente disminuido en uno por la derivada de la función.

Ejemplos:

A. Deriva utilizando el exponente entero positivo.

- **1.** $y = x^3$

  Solución:

  $$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

- **2.** $y = x^4 - 2x^2 + 5x + 7$

  Solución:

  $$y' = 4x^3 - 4x + 5$$

- **3.** $y = (3 - x)(2 + x)$, que es el ejemplo del apartado anterior.

  Solución:

  Desarrollamos:

  $$y = 6 + x - x^2$$

  $$y' = 1 - 2x$$

- **4.** $y = (3x + 2)^2$

  Solución:

  Señalamos u:

  $$u = 3x + 2$$

  $$\frac{du}{dx} = 3$$

  Ahora aplicamos la fórmula **(6)**:

  $$y' = 2\,(3x + 2)^{2-1}\,(3)$$

  $$y' = 6\,(3x + 2)$$

B. Deriva utilizando el exponente entero negativo.

- **1.** $y = \dfrac{3}{x^2}$

  Solución:

  Usamos el exponente negativo:

  $$y = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$$

  $$\frac{dy}{dx} = -2(3x^{-2-1}) = -6x^{-3}$$

Quitamos el exponente negativo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{x^3}$$

C. Deriva utilizando el exponente fraccionario y el exponente negativo.

■ **1.** $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Usamos exponentes fraccionarios y exponente negativo:

$$y = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}-1}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Nota: en los ejemplos anteriores hemos utilizado la fórmula **(6)** según que el exponente sea un número entero positivo o negativo, o un número racional positivo o negativo.

Derivada de un cociente de funciones

Sea $y = \dfrac{u}{v}$ donde:

$$y = f(x)$$
$$u = f(x)$$
$$v = f(x) \text{ con } v \neq 0$$

Como y, u, v están en función de x, cuando x se incremente, entonces $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, de donde:

1. $y + \Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$

2. $\Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{v(u + \Delta u) - (v + \Delta v)(u)}{v(v + \Delta v)}$

$$= \frac{vu + v\Delta u - vu - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + \lim\limits_{\Delta x \to 0} v\Delta v} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2 + 0}$

de donde:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \textbf{(7)}$$

La derivada de un cociente de funciones es igual a una fracción que tiene por numerador: el denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y=\dfrac{x^3}{4x}$

  Solución:

  Señalamos u:

  $u = x^3$

  $u' = 3x^2$

  Señalamos v:

  $v = 4x$

  $v' = 4$

  Ahora aplicamos la fórmula **(7)**:

$$y'=\frac{4x(3x^2)-x^3(4)}{(4x)^2}=\frac{12x^3-4x^3}{16x^2}=\frac{4x^2(3x-x)}{16x^2}=\frac{3x-x}{4}=\frac{x}{2}$$

Derivada de una función entre una constante

Sea $y=\dfrac{u}{c}$, en donde c es una constante y $c \neq 0$

Aplicamos la fórmula **(7)**:

$$y'=\frac{c\dfrac{du}{dx}-u\overbrace{\dfrac{d(c)}{dx}}^{0}}{c^2}=\frac{\dfrac{du}{dx}}{c}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\dfrac{du}{dx}}{c} \qquad \textbf{(8)}$$

La derivada de una función entre una constante es igual a la derivada de la función entre la constante.

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y=\dfrac{3x+2}{8}$

Solución:

$v = 3x + 2$

Señalamos u:

$u' = 3$

$y' = \frac{3}{8}$

Nota: esta fórmula también podemos citarla como un caso particular de la fórmula **(4)**.

Derivada de la raíz cuadrada de una función

Sea $y = \sqrt{u}$

Aplicamos la fórmula **(6)**:

$y = u^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}} \qquad \textbf{(9)}$$

La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual a la derivada de la función entre dos veces la raíz cuadrada de la función.

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y = \sqrt{3x-2}$

  Solución:

  Señalamos u:

  $u = 3x - 2$

  $u' = 3$

  $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

Derivada de la raíz cuadrada de *x* con respecto a sí misma

Sea $y = \sqrt{x}$

Aplicamos la fórmula **(9)**:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\frac{dx}{dx}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \textbf{(10)}$$

¡Aplícate!

I. Deriva las funciones siguientes respecto a x:

1. $y = 2x + 5$ **Sol.** 2

2. $y = 5$ **Sol.** 0

3. $y = 3c$ **Sol.** 0

4. $y = -\frac{3}{5}$ **Sol.** 0

5. $y = \sqrt{6}$ **Sol.** 0

6. $y = 5x$ **Sol.** 5

7. $y = \frac{5}{2}x$ **Sol.** $\frac{5}{2}$

8. $y = 2 + \frac{x}{2}$ **Sol.** $\frac{1}{2}$

9. $y = \frac{1}{5}x$ **Sol.** $\frac{1}{5}$

10. $y = -\frac{2x}{7} + 1$ **Sol.** $-\frac{2}{7}$

Ejercicios de repaso

I. Deriva las funciones siguientes respecto a x:

1. $y = 3x^2 - x + 5$ **Sol.** $6x - 1$

2. $y = kx - c$ **Sol.** k

3. $y = \frac{3x}{7} - c$ **Sol.** $\frac{3}{7}$

4. $y = \frac{4x}{3}$ **Sol.** $\frac{4}{3}$

5. $y = x^2 - 5x + 3$ **Sol.** $2x - 5$

6. $y = 2x^2 - 8x + 5$ **Sol.** $4x - 8$

7. $y = x^3 - x$ **Sol.** $3x^2 - 1$

8. $y = (4 - x)(3 + x)$ **Sol.** $1 - 2x$

9. $y = (3 - x)(2 - x)(5 - x)$ **Sol.** $-3x^2 + 20x - 31$

10. $y = 9(x - 1)(2x + 3)$ **Sol.** $36x + 9$

11. $y = \dfrac{x-2}{5}$ **Sol.** $\dfrac{1}{5}$

12. $y = 3x^5$ **Sol.** $15x^4$

13. $y = ax^4$ **Sol.** $4ax^3$

14. $y = 3x^2 - 6x + 5$ **Sol.** $6x - 6$

15. $y = 2x^3 - 7$ **Sol.** $6x^2$

16. $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ **Sol.** $-\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^5}}$

17. $y = \dfrac{5x^3}{4}$ **Sol.** $\dfrac{15}{4}x^2$

18. $y = \dfrac{ax^5}{b}$ **Sol.** $\dfrac{5ax^4}{b}$

19. $y = \dfrac{x^n}{d}$ **Sol.** $\dfrac{nx^{n-1}}{d}$

20. $y = \dfrac{\frac{4}{5}}{x^2} + \dfrac{\frac{2}{3}}{x^3}$ **Sol.** $-\dfrac{8}{5x^3} - \dfrac{2}{x^4}$

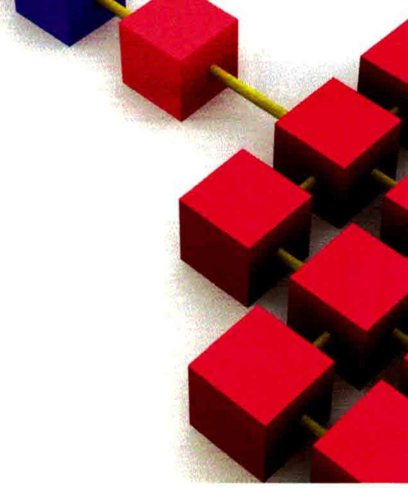
21. $y = \sqrt{x}$ **Sol.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

22. $y = \sqrt[3]{x^2}$ **Sol.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

23. $y=\frac{3}{5}x^5$ **Sol.** $3x^4$

24. $y=\sqrt[5]{x^3}$ **Sol.** $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

25. $y=\frac{5}{x^4}$ **Sol.** $-\frac{20}{x^5}$



Capítulo 6

Derivada de una función de funciones (regla de la cadena)

Introducción

En algunos casos, al aplicar las fórmulas de derivación que se citan a continuación, y algunas otras que deduciremos más adelante, *y* está en función de *x* por intermedio de *u*, de *v* o de ambas. A esto se le llama **función de funciones**.

Fórmula **(5)**

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

Fórmula **(6)**

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Fórmula **(7)**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ejemplos:

1. La expresión $y = (3x + 5)^2$ indica que y está en función de *x*. Si escribimos:

$u = 3x + 5$

Obtenemos:

$y = u^2$

Lo que expresa que y es una función de funciones de *x*.

2. La expresión $y=\sqrt{2x^3+5}$ señala que *y* está en función de *x*. Si escribimos:

$u = 2x^3 + 5$

Obtenemos:

$y=\sqrt{u}$

Lo cual expresa que *y* es una función de funciones de *x*.

En estos casos *u*, que es una nueva variable, se le llama **variable intermedia** y se expresa así:

$$y=f(x)=f[\,u(x)]$$

Derivada de una función de funciones

Para obtener la derivada de una función de funciones aplicamos la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(11)}$$

La derivada de y con respecto a x es igual a la derivada de y con respecto a u, multiplicada por la derivada de u con respecto a x.

Ejercicios resueltos

- **1.** Deriva $y=\left(\frac{2x+1}{4}\right)^3$

Solución:

Aplicamos la fórmula **(11)**:

Escribimos:

$$u=\frac{2x+1}{4}$$

Así obtenemos:

$$y=u^3$$

Para aplicar la fórmula, derivamos:

$$\begin{array}{l|l} y=u^3 & u=\dfrac{2x+1}{4}=\dfrac{2x}{4}+\dfrac{1}{4} \\ y'=3u^2 & u'=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Sustituimos en la fórmula **(11)**:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(3)u^2=\frac{1}{2}(3)\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}(3)\left[\frac{(2x+1)^2}{4^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(3)\left(\frac{4x^2+4x+1}{16}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{32}(4x^2+4x+1)$$

Solución aplicando la fórmula **(6)**:

$$y=\left(\frac{2x+1}{4}\right)^3$$

Escribimos:

$$u=\frac{2x+1}{4}=\frac{2x}{4}+\frac{1}{4}$$

$$u'=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$y'=3\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{4x^2+4x+1}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y'=\frac{3}{32}(4x^2+4x+1)$$

2. Deriva $y=(3x+4)^2$

Solución:

Por tratarse de un binomio cuadrado perfecto, fácilmente podemos desarrollar y derivar por partes si aplicamos la fórmula **(3)**. En otros casos, y si suponemos, por ejemplo, que la potencia fuera 5, resultaría muy laborioso el desarrollo.

Solución aplicando la fórmula **(3)**:

$$y=(3x+4)^2=9x^2+24x+16$$

$$y'=18x+24$$

Solución aplicando la fórmula **(11)**:

$$y=(3x+4)^2$$

Escribimos:

$$u=3x+4$$

Obtenemos:

$$y=u^2$$

Para aplicar la fórmula derivamos:

$y=u^2$	$u=3x+4$
$y'=2u$	$u'=3$

Sustituimos en la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=2u(3)=2(3x+4)(3)=6(3x+4)$$

$$\frac{dy}{dx}=18x+24$$

Solución aplicando la fórmula **(6)**:

$y = (3x+4)^2$

Escribimos:

$u = 3x + 4$

$u' = 3$

Sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$y' = 2(3x+4)(3) = 6(3x+4)$

$y' = 18x + 24$

■ **3.** Deriva $y = \sqrt{3-2x}$

Solución:

Escribimos:

$u = 3 - 2x$

Obtenemos:

$y = \sqrt{u}$

Para aplicar la fórmula **(11)** derivamos:

$y = \sqrt{u}$	$u = 3-2x$
$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$	$u' = -2$

Sustituimos en la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2) = -\frac{2}{2\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

Solución aplicando la fórmula **(6)**:

$y = \sqrt{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{2}}$

Escribimos:

$u = 3 - 2x$

$u' = -2$

Sustituimos en la fórmula:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{1}{2}(3-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

Conclusión

Para derivar con las fórmulas **(5)**, **(6)**, **(7)** y otras que se deducirán posteriormente, es necesario señalar u, v o ambas, según el caso, y desarrollar aplicando la fórmula correspondiente o bien, el número **(11)**.

Primero es necesario obtener la derivada siguiendo todo el procedimiento; más adelante, y con un poco de práctica, podrás abreviar el proceso con tus propios métodos.

Una vez aplicada la fórmula correspondiente para obtener la derivada, se realizan las operaciones algebraicas o trigonométricas que procedan y se ordenan los signos.

El resultado se debe simplificar y factorizar para obtener información, ya que igualando a cero el denominador podemos calcular dónde es indefinida la derivada. Si el numerador es igual a cero, entonces podremos concluir que la pendiente es nula; además, se pueden realizar otros análisis acerca de la derivada.

Observa los ejercicios en que aplicamos la derivada de función de funciones (Regla de la cadena) y cuando el resultado lo obtuvimos directamente sin expresar el desarrollo.

Ejercicios resueltos. Continuación

Potencia de una función:

- **1.** $y = 5x^7 - 4x^5$

$$y' = 5(7)x^6 - 4(5)x^4$$

$$y' = 35x^6 - 20x^4$$

$$y' = 5x^4(7x^2 - 4)$$

- **2.** $y = (2x)^4$

$$y' = 4(2x)^3 \frac{d}{dx}(2x)$$

$$y' = 4(2x)^3(2)$$

$$y' = 64x^3$$

En este ejercicio, y en el siguiente, calculamos directamente la derivada de $2x$ y de $3x - 4$.

- **3.** $y = (3x-4)^3$

$$y' = 3(3x-4)^2 \frac{d}{dx}(3x-4)$$

$$y' = 3(3x-4)^2(3)$$

$$y' = 9(3x-4)^2$$

4. $y=\sqrt[3]{x^4}-5\sqrt{x^3}$

$$y=\sqrt[3]{x^4}-5\sqrt{x^3}=x^{\frac{4}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}$$

$$y'=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}-5\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{15}{2}\sqrt{x}$$

5. $y=(3x^3-5x^2+3)^7$

$$y'=7(3x^3-5x^2+3)^6\frac{d}{dx}(3x^3-5x^2+3)$$

$$u=3x^3-5x^2+3$$

$$u'=9x^2-10x$$

$$y'=7(3x^3-5x^2+3)^6(9x^2-10x)$$

6. $y=\left(\frac{x+1}{5x-2}\right)^3$

$$y'=3\left(\frac{x+1}{5x-2}\right)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{5x-2}\right)$$

$$u=x+1 \quad\Big|\quad v=5x-2$$
$$u'=1 \quad\Big|\quad v'=5$$

$$y'=3\left(\frac{x+1}{5x-2}\right)^2\left[\frac{(5x-2)(1)-(x+1)(5)}{(5x-2)^2}\right]$$

$$y'=\frac{3(x+1)^2}{(5x-2)^2}\left[\frac{5x-2-5x-5}{(5x-2)^2}\right]$$

$$y'=-\frac{21(x+1)^2}{(5x-2)^4}$$

7. $y=\left(\frac{5x-2}{3x+1}\right)^7$

$$y'=7\left(\frac{5x-2}{3x+1}\right)^6\frac{d}{dx}\left(\frac{5x-2}{3x+1}\right)$$

$$u=5x-2 \quad\Big|\quad v=3x+1$$
$$u'=5 \quad\Big|\quad v'=3$$

$$y'=7\left(\frac{5x-2}{3x+1}\right)^6\left[\frac{(3x+1)(5)-(5x-2)(3)}{(3x+1)^2}\right]$$

$$y' = \frac{7(5x-2)^6}{(3x+1)^6}\left(\frac{15x+5-15x+6}{(3x+1)^2}\right)$$

$$y' = \frac{77(5x-2)^6}{(3x+1)^8}$$

- **8.** $y=(x^2+2x)^3(7x+1)^4$

$u=(x^2+2x)^3$	$v=(7x+1)^4$
$u'=3(x^2+2x)^2\dfrac{d}{dx}(x^2+2x)$	$v'=4(7x+1)^3\dfrac{d}{dx}(7x+1)$
$u'=3(x^2+2x)^2(2x+2)$	$v'=4(7x+1)^3(7)$
$u'=3(x^2+2x)^2 2(x+1)$	$v'=28(7x+1)^3$

$$y'=(x^2+2x)^3 28(7x+1)^3+(7x+1)^4 6(x^2+2x)^2(x+1)$$

$$y'= 28(x^2+2x)^3(7x+1)^3+6(7x+1)^4(x^2+2x)^2(x+1)$$

Exponente fraccionario:

- **9.** $y=5\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2}$

$$y=5\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2}=5x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=5\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'=\frac{15}{2}\sqrt{x}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Mentalmente restamos una unidad a cada exponente, así:

de $\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$ y de $\frac{2}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{1}{3}$

Exponente negativo:

- **10.** $y=x^{-2}-x^{-1}$

$$y=x^{-2}-x^{-1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$$

En cada término aplicamos la derivada de un cociente:

$$y'=\frac{x^2(0)-1(2x)}{(x^2)^2}-\frac{x(0)-1(1)}{x^2}=\frac{-2x}{x^4}-\frac{-1}{x^2}=\frac{-2}{x^3}-\frac{-1}{x^2}$$

$$y'=-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}$$

$$y'=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

11. $y=(x^2+6)x^{-3}$

$$y=(x^2+6)x^{-3}=\frac{x^2+6}{x^3}$$

Derivada de un cociente:

$$\begin{array}{l|l} u=x^2+6 & v=x^3 \\ u'=2x & v'=3x^2 \end{array}$$

$$y'=\frac{x^3(2x)-(x^2+6)3x^2}{(x^3)^2}=\frac{2x^4-(3x^4+18x^2)}{x^6}$$

$$=\frac{2x^4-3x^4-18x^2}{x^6}=\frac{-x^4-18x^2}{x^6}=\frac{x^2(-x^2-18)}{x^6}$$

$$y'=-\frac{x^2+18}{x^4}$$

12. $y=\dfrac{(x+2)^4}{(x-2)^{-3}}$

$$y=\frac{(x+2)^4}{(x-2)^{-3}}=(x+2)^4(x-2)^3$$

Derivada de un producto:

$$\begin{array}{l|l} u=(x+2)^4 & v=(x-2)^3 \\ u'=4(x+2)^3(1) & v'=3(x-2)^2(1) \end{array}$$

$$y'=(x+2)^4(3)(x-2)^2(1)+(x-2)^3(4)(x+2)^3(1)$$

$$y'=3(x+2)^4(x-2)^2+4(x-2)^3(x+2)^3$$

13. $y=\dfrac{x-x^{-1}}{x+x^{-2}}$

$$y=\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-2}}=\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^3+1}{x^2}}=\frac{x^2(x^2-1)}{x(x^3+1)}$$

$$=\frac{x(x^2-1)}{x^3+1}$$

$$y=\frac{x^3-x}{x^3+1}$$

Derivada de un cociente:

$$\begin{array}{r|l} u = x^3 - x & v = x^3 + 1 \\ u' = 3x^2 - 1 & v' = 3x^2 \end{array}$$

$$y' = \frac{(x^3+1)(3x^2-1) - (x^3-x)3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^5 - x^3 + 3x^2 - 1 - 3x^5 + 3x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{(x^3+1)^2}$$

■ **14.** $y = \dfrac{(x+1)^{-1}}{(x-1)^{-2}}$

$$y = \frac{(x+1)^{-1}}{(x-1)^{-2}} = \frac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{(x-1)^2}}$$

$$y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

Derivada de un cociente:

$$\begin{array}{r|l} u = (x-1)^2 & v = x + 1 \\ u' = 2(x-1)\ (1) & v' = 1 \end{array}$$

$$y' = \frac{(x+1)(2)(x-1)(1) - (x-1)^2(1)}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2-1) - (x-1)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2 - x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

■ **15.** $y = \dfrac{1}{5x^3 + 3x^2 - 4x + 3}$

$$y = \frac{1}{5x^3 + 3x^2 - 4x + 3} = (5x^3 + 3x^2 - 4x + 3)^{-1}$$

$$y' = -1(5x^3 + 3x^2 - 4x + 3)^{-2}\,\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x^2 - 4x + 3)$$

La derivada se puede calcular mentalmente.

$$y' = -1(5x^3 + 3x^2 - 4x + 3)^{-2}(15x^2 + 6x - 4)$$

$$y' = -\frac{15x^2 + 6x - 4}{(5x^3 + 3x^2 - 4x + 3)^2}$$

Cociente de funciones:

16. $y=\dfrac{x^3-x}{x^3+1}$

$$\begin{array}{l|l} u=x^3-x & v=x^3+1 \\ u'=3x^2-1 & v'=3x^2 \end{array}$$

$$y'=\frac{(x^3+1)(3x^2-1)-(x^3-x)(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{3x^5+3x^2-x^3-1-3x^5+3x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$y'=\frac{2x^3+3x^2-1}{(x^3+1)^2}$$

17. $y=\dfrac{(1+x)^3}{x}$

$$\begin{array}{l|l} u=(1+x)^3 & v=x \\ u'=3(1+x)^2(1) & v'=1 \end{array}$$

$$y'=\frac{x(3)(1+x)^2(1)-(1+x)^3(1)}{x^2}$$

$$y'=\frac{3x(1+x)^2-(1+x)^3}{x^2}$$

18. $y=\dfrac{5+x}{7-x}$

$$\begin{array}{l|l} u=5+x & v=7-x \\ u'=1 & v'=-1 \end{array}$$

$$y'=\frac{(7-x)(1)-(5+x)(-1)}{(7-x)^2}=\frac{7-x+5+x}{(7-x)^2}$$

$$y'=\frac{12}{(7-x)^2}$$

Producto de funciones:

19. $y=\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(5+\dfrac{1}{x}\right)$

$$y=\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)\left(5+\frac{1}{x}\right)=10x+\frac{2x}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$

$$y=10x+2-\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}=10x+2-5x^{-2}-x^{-3}$$

$$y'=10\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}2+\frac{d}{dx}(-5x^{-2})+\frac{d}{dx}(-x^{-3})=10+0+10x^{-3}+3x^{-4}$$

$$y'=10+10x^{-3}+3x^{-4}$$

■ **20.** $y = x^3(5x^2 - 2x + 7)$

$$y = x^3(5x^2 - 2x + 7) = 5x^5 - 2x^4 + 7x^3$$

$$y' = 5(5)x^4 - 2(4)x^3 + 7(3)x^2$$

$$y' = 25x^4 - 8x^3 + 21x^2$$

Ejercicios de repaso

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = (5x^2 - 3)^2$ — ***Sol.*** $100x^3 - 60x$

2. $y = (5x - 2)^3$ — ***Sol.*** $375x^2 - 300x + 60$

3. $y = (1 - 5x + 4x^2)^5$ — ***Sol.*** $5(1 - 5x + 4x^2)^4(8x - 5)$

4. $y = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ — ***Sol.*** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-4}}$

5. $y = \sqrt{1-x}$ — ***Sol.*** $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

6. $y = (3 - x)(2 - x)$ — ***Sol.*** $2x - 5$

7. $y = \dfrac{2 - 3x}{4 + 5x}$ — ***Sol.*** $-\dfrac{22}{(4+5x)^2}$

8. $y = \dfrac{2 + x}{4 + 3x}$ — ***Sol.*** $-\dfrac{2}{(4+3x)^2}$

9. $y = \dfrac{5 - x}{2}$ — ***Sol.*** $-\dfrac{1}{2}$

10. $y = \dfrac{-3}{2 - x}$ — ***Sol.*** $-\dfrac{3}{(2-x)^2}$

11. $y = -\dfrac{1}{3x + 4}$ — ***Sol.*** $\dfrac{3}{(3x+4)^2}$

12. $y = \dfrac{x^2 + b^2}{x^2 - b^2}$ — ***Sol.*** $-\dfrac{4xb^2}{(x^2-b^2)^2}$

13. $y=\sqrt{5x^2-3x+6}$ **Sol.** $\dfrac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x+6}}$

14. $y=\sqrt{4-3x}$ **Sol.** $-\dfrac{3}{2\sqrt{4-3x}}$

15. $y=\left(\dfrac{2}{3-x}\right)^2$ **Sol.** $\dfrac{8}{(3-x)^3}$

16. $y=\left(\dfrac{1-2x}{5-x}\right)^3$ **Sol.** $-\dfrac{27(1-2x)^2}{(5-x)^4}$

17. $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{2-3x}$ **Sol.** $\dfrac{-3x+10}{2\sqrt{2-x}(2-3x)^2}$

18. $y=\sqrt[3]{1-2x}$ **Sol.** $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$

19. $y=\sqrt[3]{3x^2-5x}$ **Sol.** $\dfrac{6x-5}{3\sqrt[3]{(3x^2-5x)^2}}$

20. $y=(3x+1)(x+3)^2$ **Sol.** $9x^2+38x+33$

21. $y=\dfrac{4x}{(3x^2-1)^2}$ **Sol.** $-\dfrac{36x^2+4}{(3x^2-1)^3}$

22. $f(t)=\dfrac{(t^3-2t^2)^3}{5}$ **Sol.** $\dfrac{3(t^3-2t^2)^2(3t^2-4t)}{5}$

23. $f(s)=\dfrac{\sqrt{s^2-3}}{5}$ **Sol.** $\dfrac{s}{5(s^2-3)^{\frac{1}{2}}}$

24. $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1-x}}$ **Sol.** $\dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

25. $f(r)=\left(\dfrac{2}{3-r}\right)^2$ **Sol.** $\dfrac{8}{(3-r)^3}$

26. $\dfrac{d}{dt}(2t^2-t+5)$ **Sol.** $4t-1$

27. $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1+\theta}{5}\right)$ **Sol.** $\dfrac{1}{5}$

28. $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right)$ **Sol.** $-\frac{3}{x^2}$

29. $\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{t^2+1}\right)$ **Sol.** $-\frac{6t}{(t^2+1)^2}$

30. $\frac{d}{ds}\sqrt[3]{(s-4)^2}$ **Sol.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{s-4}}$

31. $s(t)=\sqrt{1-2t}$ **Sol.** $-\frac{1}{\sqrt{1-2t}}$

32. $f(\theta)=(3-2\theta^2)^3$ **Sol.** $-12\theta(3-2\theta^2)^2$

33. $G(x)=\sqrt[3]{(2-9x)}$ **Sol.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{(2-9x)^2}}$

34. $f(t)=\left(1-5t\right)^{\frac{2}{5}}$ **Sol.** $-\frac{2}{\sqrt[5]{(1-5t)^3}}$

35. $f(x)=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}$ **Sol.** $\frac{3}{2\sqrt{3x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

36. $s(t)=\frac{1-t}{3+2t^2}$ **Sol.** $\frac{2t^2-4t-3}{(3+2t^2)^2}$

37. $s(t)=(3-t)(2-t)(5-t)$ **Sol.** $-3t^2+20t-31$

38. $r(t)=2\sqrt{t^3}+6\sqrt{t}$ **Sol.** $\frac{3(t+1)}{\sqrt{t}}$

39. $s(\theta)=\sqrt{\theta}(2\theta-1)$ **Sol.** $\frac{6\theta-1}{2\sqrt{\theta}}$

40. $f(t)=(t^2-4t+2)(5t-2)$ **Sol.** $15t^2-44t+18$

41. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x^3}$ **Sol.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{15}{2}\sqrt{x}$

42. $M(z)=\left(z^2-5z+3\right)^{-\frac{2}{3}}$ **Sol.** $-\frac{4z-10}{3\sqrt[3]{(z^2-5z+3)^5}}$

43. $g(x)=8\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[3]{x^5}$ **Sol.** $\frac{24}{5\sqrt[5]{x^2}}+\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$

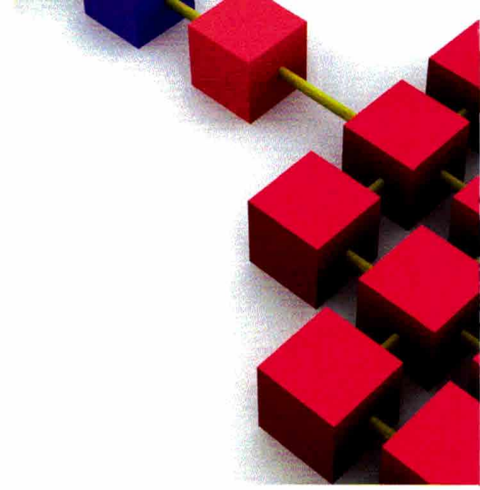
44. $f(r)=\sqrt[3]{5r^3+14}$ **Sol.** $\dfrac{5r^2}{\sqrt[3]{(5r^3+14)^2}}$

45. $F(x)=\dfrac{7}{\sqrt[5]{x^5-16}}$ **Sol.** $-\dfrac{7x^4}{\sqrt[5]{(x^5-16)^6}}$

46. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

47. $y(x)=\sqrt{2x}+\sqrt{x}$ **Sol.** $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

48. $f(x)=\sqrt[3]{5x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3x}}$ **Sol.** $\dfrac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}}+\dfrac{3}{2\sqrt{(3x)^3}}$



Capítulo 7

Derivadas sucesivas de una función (derivadas de orden superior)

Generalidades

Para estudiar los máximos y mínimos relativos, el sentido de la concavidad en un punto y determinar los puntos de inflexión de una curva es necesario obtener las derivadas sucesivas de una función.

$\dfrac{dy}{dx}$ Es la **primera derivada**.

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ La derivada de la primera derivada es la **segunda derivada** y se expresa así:

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ La derivada de la segunda derivada es la **tercera derivada** y se expresa así:

$$\frac{d^3y}{dx^3}$$

Así sucesivamente hasta la **n-ésima derivada**.

Notación:

$$\frac{dy}{dx}=y' \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=y'''$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y'' \qquad \frac{d^4y}{dx^4}=y^{IV}$$

Ejercicios resueltos

■ **1.** Deriva $y = 2x^4$ hasta la quinta derivada.

$$y=2x^4 \qquad y'''=48x$$

$$y'=8x^3 \qquad y^{IV}=48$$

$$y''=24x^2 \qquad y^{V}=0$$

2. Calcula hasta la tercera derivada de $y=\dfrac{1}{x^3}$

$$y=x^{-3}$$

$$y'=-3(x)^{-4}$$

$$y''=(-4)(-3)(x)^{-5}=12x^{-5}$$

$$y'''=-5(12)(x)^{-6}=-\frac{60}{x^6}$$

Nota: los resultados deben expresarse con exponentes positivos.

3. Calcula hasta la cuarta derivada de $y=2x^5-3x^2+6x$

$$y'=10x^4-6x+6$$

$$y''=40x^3-6$$

$$y'''=120x^2$$

$$y^{IV}=240x$$

4. Calcula hasta la tercera derivada de $y=\sqrt[3]{4-9x}$

$$y=(4-9x)^{\frac{1}{3}}$$

$$y'=\frac{1}{3}(4-9x)^{-\frac{2}{3}}(-9)=-3(4-9x)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{(4-9x)^2}}$$

Como:

$$y'=-3(4-9x)^{-\frac{2}{3}}$$

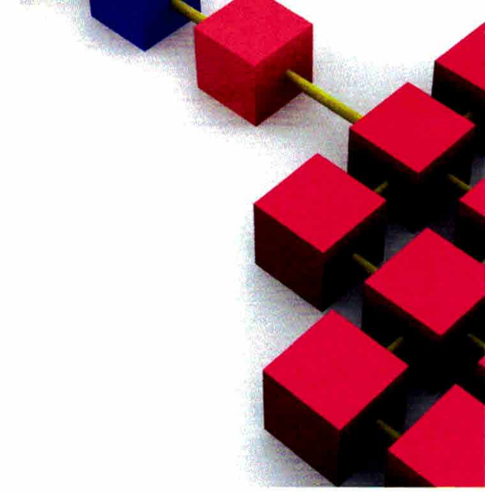
$$y''=-3\left(-\frac{2}{3}\right)(4-9x)^{-\frac{5}{3}}(-9)=2(-9)(4-9x)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{18}{\sqrt[3]{(4-9x)^5}}$$

Como:

$$y''=-18(4-9x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'''=(-18)\left(-\frac{5}{3}\right)(4-9x)^{-\frac{8}{3}}(-9)$$

$$y'''=-\frac{270}{\sqrt[3]{(4-9x)^8}}$$



Capítulo 8

Derivada de funciones implícitas

Introducción

Existen funciones explícitas y funciones implícitas.

Ejemplo:

La función $y=\sqrt{5-x^2}$ está expresada en forma explícita; la misma expresión en forma implícita sería $y^2+x^2=5$.

Hemos estudiado las fórmulas para derivar las funciones explícitas, pero sucede en ocasiones que debemos derivar una función implícita porque no es posible o bien, resulta muy complicado despejar la y. Esta situación con el método de *derivación implícita*, que constituye una aplicación de la derivación de una función de funciones.

Conceptos clave

Función implícita

Procedimiento para derivar una función implícita

Derivamos término a término y tomamos a y como función de x.

En la expresión resultante despejamos $\frac{dy}{dx}$ como lo hacemos en una ecuación.

En algunos casos haremos uso de las fórmulas **(5)**, **(6)**, **(7)** y otras según se necesite.

Ejemplo:

- **1.** Deriva la función implícita $x^2+y^2=5$

Solución:

Derivamos término a término con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x$$

$$\frac{d}{dx}(y^2)=2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(5)=0$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-5)=2x+2y\frac{dy}{dx}-0 \qquad \textbf{(1)}$$

Despejamos en **(1)**:

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y} \qquad \textbf{(2)}$$

Como en $x^2+y^2=5$

$y^2=5-x^2$

$y=\sqrt{5-x^2}$

Sustituimos y en **(2)**:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

El ejercicio anterior lo podemos expresar en forma explícita y obtener su derivada. Sigamos con el mismo ejemplo:

Deriva $x^2+y^2=5$

$y=\sqrt{5-x^2}=(5-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$u=5-x^2$

$u'=-2x$

$$y'=\frac{1}{2}(5-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$y'=-\frac{2x}{2\sqrt{5-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

Ejemplo:

1. Deriva $5x^2-xy+y^2=0$

Solución:

En este caso no es posible dar la expresión en forma explícita, por lo que es necesario aplicar el procedimiento de derivación implícita.

$5x^2-xy+y^2=0$

Derivamos término a término con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(5x^2)=10x$$

$$\frac{d}{dx}(xy)=x\frac{dy}{dx}+y$$

Observa que aplicamos la fórmula **(5)**, derivada de un producto.

$u=x$	$v=y$
$u'=1$	$v'=\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(y^2)=2y\frac{dy}{dx}$$

Sustituimos:

$$\frac{d}{dx}(5x^2-xy+y^2)=10x-\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2y\frac{dy}{dx}=$$

$$10x-x\frac{dy}{dx}-y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

Despejamos:

$$-x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=y-10x$$

$$\frac{dy}{dx}(-x+2y)=y-10x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-10x}{2y-x}$$

Nota: en general, los resultados de las funciones implícitas incluyen a x y a y como en el ejemplo anterior.

Ejercicios resueltos

Derivadas implícitas:

1. $\frac{x+y}{x-y}=x^2$

$$x+y=x^2(x-y)$$

$$x+y=x^3-x^2y$$

$$1+\frac{dy}{dx}=3x^2-\left(x^2\frac{dy}{dx}+2xy\right)$$

$$1+\frac{dy}{dx}=3x^2-x^2\frac{dy}{dx}-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}+x^2\frac{dy}{dx}=3x^2-2xy-1$$

$$\frac{dy}{dx}(1+x^2)=3x^2-2xy-1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2xy-1}{1+x^2}$$

2. $y^2=5x$

$$2y\frac{dy}{dx}=5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2y}$$

3. $y^2-2xy=8$

$$2y\frac{dy}{dx}-2\left[x\frac{dy}{dx}+y(1)\right]=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}-2y=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}=2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2y-2x)=2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{2y-2x}=\frac{y}{y-x}$$

4. $3x^2+xy-5y^2=0$

$$6x+\left[x\frac{dy}{dx}+y(1)\right]-10y\frac{dy}{dx}=0$$

$$x\frac{dy}{dx}-10y\frac{dy}{dx}=-6x-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x-10y)=-6x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{6x+y}{x-10y}$$

5. $y+y^4=x$

$$\frac{dy}{dx}+4y^3\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}(1+4y^3)=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+4y^3}$$

6. $x^3-y^4=5xy$

$$3x^2-4y^3\frac{dy}{dx}=5\left[x\frac{dy}{dx}+y(1)\right]$$

$$-4y^3\frac{dy}{dx}-5x\frac{dy}{dx}=-3x^2+5y$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}+5x\frac{dy}{dx}=3x^2-5y$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3+5x)=3x^2-5y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-5y}{4y^3+5x}$$

Ejercicios de repaso

Calcula la derivada de y con respecto a x en las siguientes funciones por el método de derivación implícita.

1. $5x^2+y^2=1$ **Sol.** $-\dfrac{5x}{\sqrt{1-5x^2}}$

2. $x^2-5y^2=3$ **Sol.** $\dfrac{x}{5\sqrt{\dfrac{x^2-3}{5}}}$

3. $x^2y^2-y^2=x^2$ **Sol.** $\dfrac{x-xy^2}{x^2y-y}$

4. $5-y^3=x$ **Sol.** $-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}}$

5. $y^2=8px$ **Sol.** $\dfrac{2p}{\sqrt{2px}}$

6. $5xy-1=0$ **Sol.** $-\dfrac{1}{5x^2}$

7. $x^2+y^2=0$ **Sol.** No hay solución porque el resultado es un número imaginario

8. $x-5y^2=3y$ **Sol.** $\dfrac{1}{10y+3}$

9. $x^3-xy+y^2=0$ **Sol.** $\dfrac{3x^2-y}{x-2y}$

10. $b^2x^2-a^2y^2=3a^2b^2$ **Sol.** $\dfrac{b^2x}{a^2y}$

11. $x-5y^2=2y$ **Sol.** $\dfrac{1}{10y+2}$

12. $x^2-y^2=5y$ **Sol.** $\dfrac{2x}{2y+5}$

13. $2xy-y^2=-1$ **Sol.** $-\dfrac{y}{x-y}$

14. $\sqrt{5x}-\sqrt{y}=2$ **Sol.** $5\sqrt{\dfrac{y}{5x}}$

15. $x^3y-x^2=-y^2$ **Sol.** $\frac{2x-3x^2y}{x^3+2y}$

16. $x^2-2xy+2y^2=2$ **Sol.** $\frac{x-y}{x-2y}$

17. $x^3+6xy+5y^3=5$ **Sol.** $-\frac{x^2+2y}{2x+5y^2}$

18. $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=6$ **Sol.** $\frac{y}{x}$

19. $3y^2+xy-5=0$ **Sol.** $-\frac{y}{6y+x}$

20. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$ **Sol.** $-\frac{y^2}{x^2}$

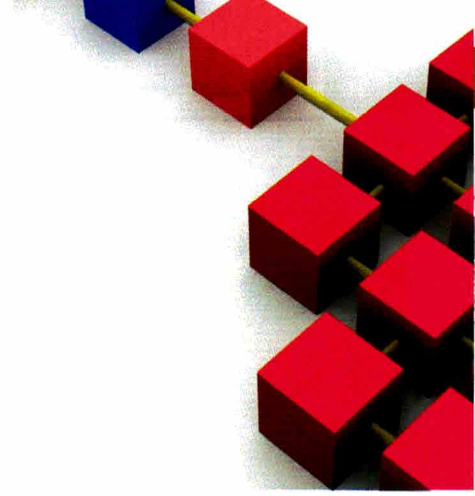
21. $\frac{x+2y}{x-2y}=x^2$ **Sol.** $\frac{3x^2-4xy-1}{2x^2+2}$

22. $\sqrt{x+y}=\frac{y}{2}$ **Sol.** $\frac{1}{\sqrt{x+y}-1}$

23. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$ **Sol.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$

24. $\sqrt{y}+\sqrt{x}=\sqrt{a}$ **Sol.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$

25. $y^3=\frac{x-y}{x+y}$ **Sol.** $\frac{1-y^3}{3xy^2+4y^3+1}$



Capítulo 9

Derivadas de funciones trigonométricas directas

Repaso de trigonometría: funciones trigonométricas

Conceptos clave

Valor natural de un ángulo

Radián

A. Funciones recíprocas

$$\operatorname{sen} A \csc A = 1$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\csc A}$$

$$\csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

$$\cos A \sec A = 1$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

Del formulario de trigonometría

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A \cot A = 1$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

B. Funciones de ángulos complementarios

$$\operatorname{sen} A = \cos(90° - A) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

$$\cos C = \operatorname{sen}(90° - C) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$\tan A = \cot(90° - A) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

$$\cot C = \tan(90° - C) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

Del formulario de trigonometría

$$\sec A = \csc(90° - A) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

$$\csc C = \sec(90° - C) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

C. Funciones pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$\operatorname{sen} A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\cos^2 A = 1 - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$$

$$\operatorname{sen} A = \tan A \cos A$$

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen} A}{\tan A}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$\cos A = \cot A \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\cos A}{\cot A}$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\tan^2 A = \sec^2 A - 1$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$$

$$\csc A = \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$\cot^2 A = \csc^2 A - 1$$

$$\cot A = \sqrt{\csc^2 A - 1}$$

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

D. Suma y diferencia de senos y cosenos:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

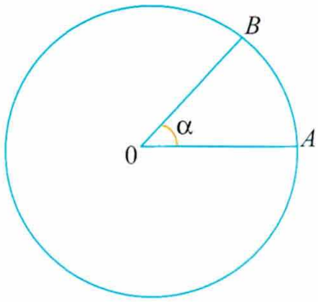
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) \cos \frac{1}{2}(A + B)$$

Valor natural o valor circular de un ángulo

El **valor natural de un ángulo** es aquel en que se toma como unidad de medida un ángulo cuya longitud de su arco es igual a la longitud de su radio.

$\widehat{AOB}$ es el ángulo llamado **radián**.

$$\widehat{AB} = \overline{OA}$$



Radián es el ángulo central subtendido por un arco igual a la longitud del radio del círculo.

Se llama *valor natural* o *valor circular de un ángulo* a la razón que hay entre el $\widehat{AB}$ y el radio $\overline{OA}$. Se expresa así:

$$\alpha = \frac{AB}{\overline{OA}}$$

Este sistema para medir ángulos se utiliza en cálculo diferencial e integral.

Relación entre radianes y grados sexagesimales

$$1° = \frac{\pi}{180°}\text{ radianes}$$

$$1\text{ radián} = \frac{180°}{\pi}\text{ grados}$$

Ejemplos:

- **1.** Convierte a radianes los ángulos de 30°, 60°, 90° y 135°.

Solución:

$$30° = 30°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad 60° = 60°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$90° = 90°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad 135° = 135°\left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

- **2.** Convierte a grados sexagesimales $\frac{\pi}{5}$ radianes.

Solución:

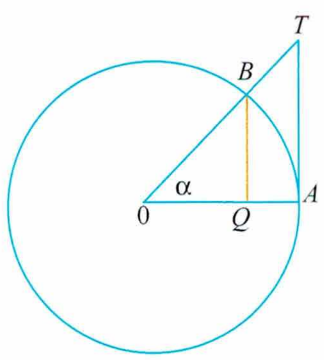
$$\frac{\pi}{5}\text{ rad} = \frac{\pi}{5}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{180°}{5} = 36°$$

Derivadas de funciones trigonométricas directas

Primero demostremos que:

$$\lim_{a\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

Dado que este límite no se puede obtener con las reglas de los límites, tendremos que utilizar algunas propiedades de geometría y trigonometría.



$\widehat{AOB}$

$\overline{BQ} \perp \overline{OA}$

$\overline{TA}\tan\alpha$

Comparando las longitudes:

$$\overline{BQ} < \widehat{AB} < \overline{AT} \qquad \textbf{(1)}$$

Dividiendo **(1)** entre $\overline{OA}$:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OA}} < \frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}} < \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} \qquad \textbf{(2)}$$

Por ser radios del mismo círculo:

$$\overline{OA} = \overline{OB}$$

Entonces:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}}$$

Como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \textbf{(3)}$$

Indicamos en el párrafo anterior:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{OA}} = \alpha \qquad \textbf{(4)}$$

Valor natural del ángulo:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \tan\alpha \qquad \textbf{(5)}$$

Sustituyendo en la desigualdad **(2)** los valores obtenidos en **(3)**, **(4)** y **(5)** obtenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha < \alpha < \tan\alpha \qquad \textbf{(6)}$$

Dividimos la desigualdad **(6)** entre $\operatorname{sen}\alpha$:

Recordamos que $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \textbf{(7)}$$

Como una desigualdad cambia de sentido al tomar los recíprocos, los tomamos en **(7)**:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$$

Si tomamos el límite cuando $\alpha \to 0$, obtenemos:

$$1 > \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha$$

Como:

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$$

Tenemos:

$$1 > \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > 1$$

Es decir:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

Derivadas de la función seno

Debemos tener presente que:

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B) \qquad \textbf{(8)}$$

Además:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

Sea $y = \operatorname{sen} u$, en donde $u = f(x)$.

Como y y u están en función de x, cuando x se incrementa, $y + \Delta y, u + \Delta u$, de donde:

1. $y + \Delta y = \operatorname{sen}(u + \Delta u)$

2. $\Delta y = \operatorname{sen}(u + \Delta u) - \operatorname{sen}(u)$

   Escribimos:

$$A = (u + \Delta u)$$
$$B = u$$

Sustituimos en el segundo miembro de **(8)**:

$$\Delta y = 2 \cos \frac{1}{2}(u + \Delta u + u) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u + \Delta u - u)$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{1}{2}(2u + \Delta u)\left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta u \right)$$

Desarrollamos:

$$\Delta y = \left(2 \cos \left[\frac{1}{2} 2u + 2 \cos \frac{1}{2} \Delta u \right] \right) \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta u \right)$$

Factorizamos:

$$\Delta y = \left[2 \cos \left(u + \frac{1}{2} \Delta u \right) \right] \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta u$$

Dividimos el segundo miembro entre $\frac{1}{2} \Delta u$

Multiplicamos el segundo miembro por $\frac{1}{2} \Delta u$

$$\Delta y = 2 \cos \left(u + \frac{1}{2} \Delta u \right) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta u}{\frac{1}{2} \Delta u} \cdot \frac{1}{2} \Delta u$$

$$\textbf{3.}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\Bigg(u+\underbrace{\frac{1}{2}\Delta u}_{0}\Bigg)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\Delta u\right)}{\underbrace{\frac{1}{2}\Delta u}_{1}}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u)=\cos u\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(12)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y=\operatorname{sen}(ax)$

  Solución:

  $y=\operatorname{sen}(ax)$
  $u=ax$
  $u'=a$
  $y'=\cos u(a)$

  Ordenamos:

  $y'=a\cos ax$

- **2.** Deriva $y=\operatorname{sen}\left(3x^2-1\right)$

  Solución:

  $y=\operatorname{sen}\left(3x^2-1\right)$
  $u=3x^2-1$
  $u'=6x$
  $y'=\cos u(6x)$

  Ordenamos:

  $y'=6x\cos\left(3x^2-1\right)$

Nota: en esta expresión, y en formas semejantes para otras, $\left(3x^2-1\right)$ representa el valor natural de un ángulo.

Nota: $\operatorname{sen}^2 x=\left(\operatorname{sen} x\right)^2$ estas expresiones son diferentes a sen x^2, pero todas ellas tienen validez.

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y=\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

  Se interpreta:

$$y=\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2$$

Aplicamos la fórmula **(6)**:

$$y' = 2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$$

Aplicamos la fórmula **(2)**:

$$y' = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = 2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$y' = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Derivada de la función coseno

Debemos tener presente que:

$$\cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Del formulario de trigonometría

$$\operatorname{sen} u = \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Sea $y=\cos u$, en donde $u=f(x)$

Como:

$$\cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

$$y = \cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Derivamos aplicando la fórmula **(9)**:

$$u = \frac{\pi}{2}-u$$

$$u' = 0-\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx}$$

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\left(-\frac{du}{dx}\right)$$

Como:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \operatorname{sen} u$$

Sustituyendo:

$$y' = \operatorname{sen} u\left(-\frac{du}{dx}\right)$$

$$y' = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx} \qquad (13)$$

Ejemplos:

1. Deriva $y = \cos 2x$

$y = \cos 2x$

$u = 2x$

$u' = 2$

$y' = -\operatorname{sen} u(2)$

Ordenamos:

$y' = -2\operatorname{sen} 2x$

2. Deriva $y = \cos(3x^2 - x)$

$y = \cos(3x^2 - x)$

$u = 3x^2 - x$

$u' = 6x - 1$

$y' = -\operatorname{sen} u(6x - 1)$

$y' = -(6x - 1)\operatorname{sen}(3x^2 - x)$

Derivada de la función tangente

Debemos tener presente que:

$$\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

$\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$ Del formulario de trigonometría

$$\sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$

Sea $y = \tan u$, en donde $u = f(x)$

Como: $\tan u = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$

$$y = \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

Derivamos aplicando la fórmula **(7)**:

$$y' = \frac{\cos u \dfrac{d}{dx} \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \dfrac{d}{dx} \cos u}{\cos^2 u}$$

Aplicamos las fórmulas **(12)** y **(13)**:

$$y' = \frac{\cos u \cos u \dfrac{du}{dx} - \operatorname{sen} u(-\operatorname{sen} u)\dfrac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Operaciones:

$$y' = \frac{(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)\dfrac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Como: $\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1$

Sustituimos:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Como:

$$\frac{1}{\cos^2 u} = \sec^2 u$$

$$y' = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(14)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y = \tan x - 2x$

  Derivamos término a término:

  $u = x$

  $u' = 1$

  $y' = \sec^2 x(1) - 2$

  $y' = \sec^2 x - 2$

2. Deriva $y=\sqrt[3]{\tan 2x}$

$$y=\sqrt[3]{\tan 2x}$$

$$y=(\tan 2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$y'=\frac{1}{3}(\tan 2x)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}(\tan 2x)$$

$$u=2x$$

$$u'=2$$

$$y'=\frac{1}{3}(\tan 2x)^{-\frac{2}{3}}\sec^2 2x(2)$$

$$y'=\frac{2\sec^2 2x}{3(\tan 2x)^{\frac{2}{3}}}$$

Derivada de la función cotangente

Se obtiene de la misma forma que la función tangente:

$$\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^2 u\frac{du}{dx} \qquad (15)$$

Ejemplo:

1. Deriva $y=2\cot\frac{x}{3}$

$$y=2\cot\frac{x}{3}$$

$$u=\frac{x}{3}$$

$$u'=\frac{1}{3}$$

$$y'=2(-\csc^2 u)\frac{1}{3}$$

$$y'=-\frac{2}{3}\csc^2\frac{x}{3}$$

2. Deriva $f(x)=\frac{1}{4}\cot 7x$

$$f(x)=\frac{1}{4}\cot 7x$$

$$u=7x$$

$$u'=7$$

$$y'=\frac{1}{4}(-\csc^2 7x)(7)$$

$$y'=-\frac{7}{4}\csc^2 7x$$

Derivada de la función secante

Tenemos presente que:

$$\sec u = \frac{1}{\cos u} = (\cos u)^{-1}$$

Del formulario de trigonometría

$$\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

Sea $y = \sec u$, en donde $u = f(x)$

Como: $\sec u = (\cos u)^{-1}$

$y = \sec u = (\cos u)^{-1}$

$y = (\cos u)^{-1}$

Derivamos aplicando la fórmula **(13)**:

$$y' = -1(\cos u)^{-2} \frac{d}{dx} \cos u$$

$$y' = \frac{-1(-\operatorname{sen} u)\dfrac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

Simplificamos los dos signos (–) y descomponemos $\cos^2 u$, que es el común denominador:

$$y' = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{du}{dx}$$

Como $\tan u = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}$$

Sustituyendo:

$$y' = \tan u \sec u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(16)}$$

Ejemplos:

- **1.** Deriva $f(x) = 7\sec\dfrac{x}{3}$

$$f(x) = 7\sec\frac{x}{3}$$

$$u = \frac{x}{3}$$

$$u' = \frac{1}{3}$$

$$y' = 7(\sec u \tan u)\frac{1}{3}$$

$$y' = \frac{7}{3}\sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}$$

2. Deriva $f(x) = \sec 3x$

$$f(x) = \sec 3x$$

$$u = 3x$$

$$u' = 3$$

$$y' = \sec u \tan u(3)$$

$$y' = 3\sec 3x \tan 3x$$

Derivada de la función cosecante

Se obtiene del mismo modo que la función secante.

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\cot u \csc u \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(17)}$$

Ejemplo:

1. Deriva $y = a\csc 5x$

Solución:

$$y = a\csc 5x$$

$$u = 5x$$

$$u' = 5$$

$$y' = a\left[-\csc u \cot u(5)\right]$$

$$y' = -5a\csc 5x \cot 5x$$

2. Deriva $f(x) = \frac{1}{4}\csc 3x$

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{4}\csc 3x$$

$$u = 3x$$

$$u' = 3$$

$$y' = \frac{1}{4}(-\cot u \csc u)(3)$$

$$y' = -\frac{3}{4}\cot 3x \csc 3x$$

Conclusión

Observa la aplicación de la derivada de función de funciones (regla de la cadena). Con la práctica seguramente podrás resolver con facilidad muchos otros ejercicios.

Si al estudiar el desarrollo de los ejercicios resueltos tienes alguna duda sobre álgebra o trigonometría, te recomendamos consultar algunos libros sobre la materia.

Nota: con frecuencia el alumno omite escribir en el resultado la dx (la diferencial de x). Por esta razón, en los ejercicios siguientes hemos subrayado este elemento y te recomendamos que lo hagas también en los ejercicios que resuelves en tu cuaderno; esto te facilitará el estudio del cálculo integral.

Ejercicios resueltos

1. $y = 6\cos x$

Solución:

$$u = \cos x$$

$$u' = -\operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x)$$

$$y' = 6(-\operatorname{sen} x) \qquad \textbf{(1)}$$

$$y' = -6 \operatorname{sen} x$$

2. $y = \cot(x^3 - 4x)$

Solución:

$$u = \cot(x^3 - 4x)$$

$$u' = -\csc^2(x^3 - 4x)\frac{d}{dx}(x^3 - 4x)$$

$$y' = -\csc^2(x^3 - 4x)(3x^2 - 4)$$

$$y' = -(3x^2 - 4)\csc^2(x^3 - 4x)$$

3. $y = 3\csc bx$

Solución:

$$u = \csc bx$$

$$u' = (-\cot bx \csc bx)\frac{d}{dx}bx$$

$$y' = 3(-\cot bx \csc bx)b$$

$$y' = -3b(\cot bx \csc bx)$$

Derivada de la potencia de una función

- **4.** $y = \cos^2 x^4$

Solución:

$$y' = 2\cos x^4 \frac{d}{dx}\cos x^4$$

$$u = \cos x^4$$

$$u' = (-\operatorname{sen} x^4)(4x^3)$$

$$y' = 2\cos x^4(-\operatorname{sen} x^4)(4x^3)$$

$$y' = -8x^3(\cos x^4 \operatorname{sen} x^4)$$

- **5.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2}(2)\operatorname{sen} x \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x$$

$$u = \operatorname{sen} x$$

$$u' = \cos x \ \mathbf{(1)}$$

$$y' = \operatorname{sen} x \cos x$$

Observa que el número **(1)** corresponde a la derivada de x, ya no escribimos $\frac{d}{dx}(x)$ y su valor lo calculamos mentalmente; cuando esto no sea posible será necesario poner la notación para evitar errores.

- **6.** $y = \cot^3(5x+2)$

Solución:

Mentalmente identificamos u y desarrollamos u'

$$y' = 3\cot^2(5x+2)\frac{d}{dx}\cot(5x+2)$$

$$u = \cot(5x+2)$$

$$u' = -\csc^2(5x+2)(5)$$

$$y' = -15\cot^2(5x+2)\csc^2(5x+2)$$

- **7.** $y = \csc^3 2x$

Solución:

$$y' = 3\csc^2 2x \frac{d}{dx}\csc 2x$$

$$u = \csc 2x$$

$$u' = -\cot 2x \csc 2x(2)$$

$$y' = -6\csc^2 2x \cot 2x \csc 2x$$

$$y' = -6\csc^3 2x \cot 2x$$

Derivada del producto

8. $y = x \operatorname{sen} 3x$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = x & v = \operatorname{sen} 3x \\ u' = 1 & v' = \cos 3x(3) \end{array}$$

$$y' = x(\cos 3x)(3) + \operatorname{sen} 3x(1)$$

$$y' = 3x\cos 3x + \operatorname{sen} 3x$$

9. $y = \sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x}$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = \sqrt{x} & v = \operatorname{sen} \sqrt{x} \\ u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & v' = \cos \sqrt{x} \dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \cos \sqrt{x} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

$$y' = \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \operatorname{sen} \sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$y' = \frac{1}{2} \cos \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

10. $y = x^2 \csc 3x$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = x^2 & v = \csc 3x \\ u' = 2x & v' = -\cot 3x \csc 3x(3) \end{array}$$

$$y' = x^2 \left[(-\cot 3x \csc 3x)(3) \right] + \csc 3x(2x)$$

$$y' = -3x^2(\cot 3x \csc 3x) + 2x \csc 3x$$

11. $y = \tan x \operatorname{sen} x$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = \tan x & v = \operatorname{sen} x \\ u' = \sec^2 x(1) & v' = \cos x(1) \end{array}$$

$$y' = \tan x(\cos x)(1) + \operatorname{sen} x(\sec^2 x)(1)$$

Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}(\cos x) + \operatorname{sen} x(\sec^2 x)$$

Factorizamos:

$$y' = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \sec^2 x$$

$$y' = \operatorname{sen} x(1 + \sec^2 x)$$

12. $y = \operatorname{sen}(\cos x)$

$u = \operatorname{sen}(\cos x)$

Solución:

$$y' = \cos(\cos x)\frac{d}{dx}\cos x$$

$$u = \cos x$$

$$u' = -\operatorname{sen} x(1)$$

$$y' = \cos(\cos x)(-\operatorname{sen} x)(1)$$

$$y' = -\operatorname{sen} x\left[\cos(\cos x)\right]$$

13. $y = x\cos 3x$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = x & v = \cos 3x \\ u' = 1 & v' = -\operatorname{sen} 3x(3) \end{array}$$

$$y' = x(-\operatorname{sen} 3x)(3) + \cos 3x(1)$$

$$y' = -3x(\operatorname{sen} 3x) + \cos 3x$$

14. $y = \tan^2 x \sec^3 x$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = \tan^2 x & v = \sec^3 x \\ u' = 2\tan x\dfrac{d}{dx}\tan x\,(1) & v' = 3\sec^2 x\dfrac{d}{dx}\sec x\,(1) \\ u' = 2\tan x(\sec^2 x)(1) & v' = 3\sec^2 x(\tan x \sec x)(1) \end{array}$$

$$y' = \tan^2 x\left[3\sec^2 x \tan x \sec x\,(1)\right] + \sec^3 x\left[2\tan x \sec^2 x\,(1)\right]$$

$$y' = 3\tan^3 x \sec^3 x + 2\sec^5 x \tan x$$

15. $y = \sec x\,(x - \operatorname{sen} x)$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = \sec x & v = x - \operatorname{sen} x \\ u' = \tan x \sec x(1) & v' = 1 - \cos x(1) \end{array}$$

$$y' = \sec x(1 - \cos x) + (x - \operatorname{sen} x)(\tan x \sec x)$$

$$y' = \sec x - \sec x \cos x + x\tan x \sec x - \operatorname{sen} x \tan x \sec x$$

Como:

$$\sec x \cos x = 1 \qquad \operatorname{sen} x \sec x$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{sen} x \frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

$$y' = \sec x - 1 - x \tan x \sec x - \tan^2 x$$

16. $y = 2\operatorname{sen}^3(5x^4)$

Solución:

$$y' = 2(3)\operatorname{sen}^2(5x^4)\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 5x^4$$

$$u = \operatorname{sen} 5x^4$$

$$u' = \cos 5x^4(20x^3)$$

$$y' = 6\operatorname{sen}^2(5x^4)\cos 5x^4(20x^3)$$

$$y' = 120x^3\operatorname{sen}^2(5x^4)\cos 5x^4$$

17. $y = \operatorname{sen}^4(3x^2)$

Solución:

$$y' = 4\operatorname{sen}^3(3x^2)\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 3x^2$$

$$y' = 4\operatorname{sen}^3(3x^2)\cos 3x^2(6x)$$

$$y' = 24x\operatorname{sen}^3(3x^2)\cos 3x^2$$

Derivada de un cociente

18. $y = \dfrac{\cot x}{x+2}$

Solución:

$$u = \cot x \qquad v = x + 2$$

$$u' = -\csc^2 x(1) \qquad v' = 1$$

$$y' = \frac{(x+2)(-\csc^2 x)(1) - \cot x(1)}{(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{-x\csc^2 x - 2\csc^2 x - \cot x}{(x+2)^2}$$

$$y' = -\frac{x\csc^2 x + 2\csc^2 x + \cot x}{(x+2)^2}$$

■ **19.** $y=\dfrac{\cos x}{x}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u=\cos x & v=x \\ u'=-\operatorname{sen} x(1) & v'=1 \end{array}$$

$$y'=\frac{x(-\operatorname{sen} x)(1)-\cos x(1)}{x^2}$$

$$y'=\frac{-x\operatorname{sen} x-\cos x}{x^2}$$

$$y'=-\frac{x\operatorname{sen} x+\cos x}{x^2}$$

Derivada de una raíz

■ **20.** $y=\sqrt[3]{\cos 3x}$

Solución:

$$y=\sqrt[3]{\cos 3x}=(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{array}{l|l} u=(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} & v=\cos 3x \\ u'=\dfrac{1}{3}(\cos 3x)^{-\frac{2}{3}}\dfrac{d}{dx}\cos 3x & v'=-\operatorname{sen} 3x(3) \end{array}$$

$$y'=\frac{1}{3}(\cos 3x)^{-\frac{2}{3}}(-\operatorname{sen} 3x)(3)$$

$$y'=\frac{-\operatorname{sen} 3x}{(\cos 3x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y'=-\frac{\operatorname{sen} 3x}{\sqrt[3]{(\cos 3x)^2}}$$

■ **21.** $y=(\tan 2x)^{\frac{1}{3}}$

Solución:

$$y'=\frac{1}{3}(\tan 2x)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\tan 2x$$

$$u'=\tan 2x$$

$$u'=\sec^2 2x(2)$$

$$y'=\frac{1}{3}(\tan 2x)^{-\frac{2}{3}}(\sec^2 2x)(2)$$

$$y' = \frac{2\sec^2 2x}{3(\tan 2x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{2\sec^2 2x}{3\sqrt[3]{(\tan 2x)^2}}$$

■ **22.** $y = 5\sqrt{\cos 2x}$

Solución:

$$y = 5\sqrt{\cos 2x} = 5(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = 5(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = 5\left(\frac{1}{2}\right)(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\cos 2x$$

$$u = \cos 2x$$

$$u' = -\operatorname{sen} 2x\,(2)$$

$$y' = 5\left(\frac{1}{2}\right)(\cos 2x)^{-\frac{1}{2}}(-2\operatorname{sen} 2x)$$

$$y' = \frac{-5\operatorname{sen} 2x}{(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = -\frac{5\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

■ **23.** $y = \sec\sqrt{x+2}$

Solución:

$$y = \sec\sqrt{x+2} = \sec(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = \sec(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = \tan(x+2)^{\frac{1}{2}}\sec(x+2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = (x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$v' = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}} \quad \textbf{(1)}$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$y' = \tan(x+2)^{\frac{1}{2}} \sec(x+2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right)$$

$$y' = \frac{\tan\sqrt{x+2}\sec\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}}$$

Derivada de una potencia negativa

24. $y = (1 + x \operatorname{sen} x)^{-2}$

Solución:

$$y' = -2(1 + x \operatorname{sen} x)^{-3} \frac{d}{dx}(1 + x \operatorname{sen} x)$$

$$u = 1 + x \operatorname{sen} x$$

$$u' = 0 + x \cos x + \operatorname{sen} x\,(1)$$

$$y' = -2(1 + x \operatorname{sen} x)^{-3}(0 + x \cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$y' = -\frac{2(x \cos x + \operatorname{sen} x)}{(1 + x \operatorname{sen} x)^3}$$

Derivada de una potencia positiva

25. $y = (\sec 5x + \tan x)^3$

Solución:

$$y' = 3(\sec 5x + \tan x)^2 \frac{d}{dx}(\sec 5x + \tan x)$$

$$u = \sec 5x + \tan x$$

$$u' = \tan 5x \sec 5x(5) + \sec^2(x)(1)$$

$$y' = 3(\sec 5x + \tan x)^2 (5 \tan 5x \sec 5x + \sec^2 x)$$

Derivada de la función implícita

26. $y^3 = x \cos y$

Solución:

$$\begin{array}{c|l} u = x & v = \cos y \\ u' = 1 & v' = -\operatorname{sen} y \dfrac{dy}{dx} \end{array}$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = x(-\operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} + \cos y\,(1)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+x\,\text{sen}\,y\frac{dy}{dx}=\cos y$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2+x\,\text{sen}\,y)=\cos y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y}{3y^2+x\,\text{sen}\,y}$$

■ **27.** $\text{sen}\,y\cos x=x+y$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u=\text{sen}\,y & v=\cos x \\ u'=\cos y\dfrac{dy}{dx} & v'=-\text{sen}\,x\,(1) \end{array}$$

$$\text{sen}\,y(-\text{sen}\,x)+\cos y(\cos x)\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\cos x\cos y\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=1+\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x\cos y-1)=1+\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y}{\cos x\cos y-1}$$

■ **28.** $\text{sen}\,y-\cos x=xy$

Solución:

$$\cos y\frac{dy}{dx}+\text{sen}\,x=x\frac{dy}{dx}+y\,(1)$$

$$\cos y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=y-\text{sen}\,x$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y-x)=y-\text{sen}\,x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-\text{sen}\,x}{\cos y-x}$$

■ **29.** $xy=\tan y$

Solución:

$$x\frac{dy}{dx}+y(1)=\sec^2 y\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx}-\sec^2 y\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x-\sec^2 y)=-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sec^2 y-x}$$

■ **30.** $x+y=\operatorname{sen} y$

Solución:

$$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}-\cos y\frac{dy}{dx}=-1$$

$$\frac{dy}{dx}(1-\cos y)=-1$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1-\cos y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y-1}$$

Ejercicios de repaso

1. Calcula la fórmula para derivar la función cotangente.

2. Calcula la fórmula para derivar la función cosecante.

Deriva las siguientes funciones:

3. $f(x)=\tan 2x$ **Sol.** $2\sec^2 2x$

4. $f(x)=\sec x^2$ **Sol.** $2x\sec x^2\tan x^2$

5. $f(x)=4\operatorname{sen} 2x$ **Sol.** $8\cos 2x$

6. $y=3\cos\dfrac{x}{2}$ **Sol.** $-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$

7. $y=3\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}$ **Sol.** $3\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

8. $y=4\cos\dfrac{x}{3}$ **Sol.** $-\dfrac{4}{3}\operatorname{sen}\dfrac{x}{3}$

9. $y=\sqrt{\operatorname{sen} x}$ **Sol.** $\dfrac{\cos x}{2(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}}$

10. $y=\cos\frac{3}{x}$ **Sol.** $\dfrac{3\operatorname{sen}\frac{3}{x}}{x^2}$

11. $y=\operatorname{sen}\frac{3}{x}$ **Sol.** $-\dfrac{3\cos\frac{3}{x}}{x^2}$

12. $y=\operatorname{sen}(1-x)^2$ **Sol.** $-2(1-x)\cos(1-x)^2$

13. $y=\tan(1-x)^2$ **Sol.** $-2(1-x)\ \sec^2(1-x)^2$

14. $y=\operatorname{sen}^2(x-2)$ **Sol.** $2\operatorname{sen}(x-2)\cos(x-2)$

15. $y=\tan\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ **Sol.** $-\dfrac{4}{(2+x)^2}\sec^2\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

16. $y=\cot\frac{\sqrt{x}}{3}$ **Sol.** $-\dfrac{\csc^2\frac{\sqrt{x}}{3}}{6\sqrt{x}}$

17. $y=\tan x-2x$ **Sol.** $\sec^2 x-2$

18. $y=\sec bx$ **Sol.** $b\sec bx\tan bx$

19. $y=\dfrac{2}{\sqrt{\sec x}}$ **Sol.** $-\dfrac{\tan x}{\sqrt{\sec x}}$

20. $y=x\cot x$ **Sol.** $-x\csc^2 x+\cot x$

21. $y=\dfrac{\cos x}{x}$ **Sol.** $\dfrac{-x\operatorname{sen}x-\cos x}{x^2}$

22. $y=\cos 2x\operatorname{sen}x$ **Sol.** $\cos x\cos 2x-2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x$

23. $y=2\operatorname{sen}2x\cos^2 x$ **Sol.** $-4\operatorname{sen}2x\cos x\operatorname{sen}x$
$+4\cos^2 x\cos 2x$

24. $y=x^2\tan ax^3$ **Sol.** $3ax^4\sec^2 ax^3+2x\tan ax^3$

25. $f(x)=\cos x+x\operatorname{sen}x$ **Sol.** $x\cos x$

26. $f(x)=3\operatorname{sen}x-x\cos x$ **Sol.** $2\cos x+x\operatorname{sen}x$

27. $y = 6\operatorname{sen} x \cos x$ **Sol.** $-6\operatorname{sen}^2 x + 6\cos^2 x = 6\cos 2x$

28. $y = 4\operatorname{sen} x \cos x$ **Sol.** $-4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x = 4\cos 2a$

Determina la primera y segunda derivada:

29. $y = \operatorname{sen} 3t$ **Sol.** $3\cos 3t$

$-9\operatorname{sen} 3t$

30. $y = \cos^2(2+t)$ **Sol.** $-2\cos(2+t)\operatorname{sen}(2+t)$

$-2\cos^2(2+t) + 2\operatorname{sen}^2(2+t)$

31. $f(s) = s\operatorname{sen} s$ **Sol.** $s\cos s + \operatorname{sen} s$

$-s\operatorname{sen} s + 2\cos s$

Calcula las derivadas implícitas:

32. $\operatorname{sen} x + \cos y = 2x$ **Sol.** $\dfrac{\cos x - 2}{\operatorname{sen} y}$

33. $\operatorname{sen} y = \cos 3x$ **Sol.** $-\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{\cos y}$

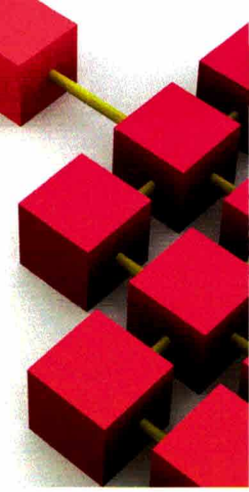
34. $\tan y = \cot(3x+2)$ **Sol.** $-\dfrac{3\csc^2(3x+2)}{\sec^2 y}$

35. $x\cos y - y\cos x = 0$ **Sol.** $\dfrac{\cos y + y\operatorname{sen} x}{\cos x + x\operatorname{sen} y}$

36. $\tan y = xy$ **Sol.** $\dfrac{y}{\sec^2 y - x}$

37. $\operatorname{sen} y = \dfrac{x}{y}$ **Sol.** $\dfrac{1}{y\left(\cos y + \dfrac{x}{y}\right)}$

38. $\operatorname{sen} 2y + \cos 3x = 0$ **Sol.** $\dfrac{3\operatorname{sen} 3x}{2\cos 2y}$



Capítulo 10

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Repaso de trigonometría: funciones trigonométricas inversas

Se llama función inversa de $y = f(x)$ la que se obtiene despejando x.

Ejemplos:

- **1.** La función inversa de $y = 2x + 7$ es $x = \dfrac{y-7}{2}$
- **2.** La función inversa de $y = \text{sen } x$ es $x = \text{ang sen } y$, que se lee "ángulo cuyo seno es y o bien, ángulo seno y".

Si consideramos el arco en vez del ángulo, se usa la notación $x = \text{arc sen } y$, que se lee "x es igual a un arco cuyo seno es y".

Si cambiamos x con y en la expresión anterior, queda $y = \text{arc sen } x$, que es la función inversa del seno x.

Algunos autores escriben la expresión:

$$y = \text{arc sen } x$$

en la forma siguiente:

$$y = \text{sen}^{-1} x$$

que se lee "el seno inverso de x". Su uso no es conveniente en nuestro medio porque sen^{-1}, así escrito, podría leerse como "sen x con exponente^{-1}"; sin embargo, citamos algunos ejemplos con esta notación.

En este texto usaremos la expresión en que se considera el arco, y como algunos profesores pueden decidir usar la del ángulo, incluimos algunos ejercicios con esta notación.

Las funciones trigonométricas inversas son multiformes, es decir, que a cada valor de la variable independiente le corresponden dos o más valores a la función.

Gráficas de las funciones trigonométricas inversas

Recuerda que el procedimiento que se sigue para construir las gráficas de las funciones trigonométricas directas es el mismo que se emplea para las funciones inversas. Para ambos tipos de funciones usamos un *sistema de coordenadas rectangulares*.

Para las funciones inversas, el valor de las razones se indica sobre el eje horizontal de las x y los ángulos correspondientes se presentan sobre el eje vertical.

Así, en la gráfica de la función trigonométrica inversa del seno, y que se ilustra en la siguiente figura, observamos que:

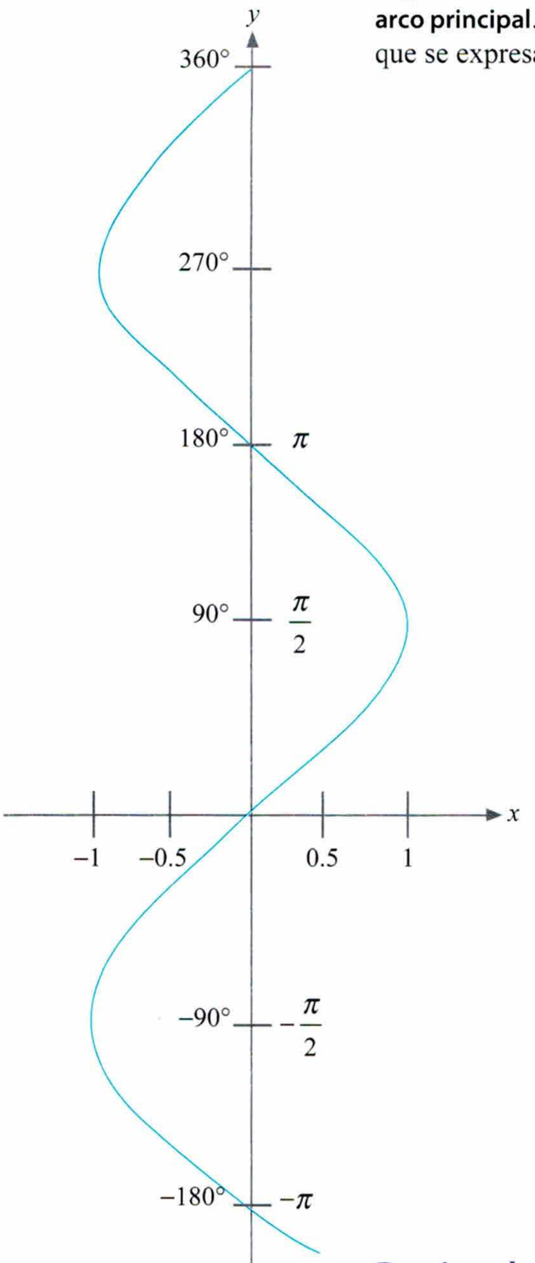
Conceptos clave

- Derivada de la función arco seno
- Derivada de la función arco coseno
- Derivada de la función arco tangente
- Derivada de la función arco cotangente
- Derivada de la función arco secante
- Derivada de la función arco cosecante

A. Podemos extender la curva indefinidamente hacia arriba o hacia abajo.

B. Si trazamos una perpendicular sobre el eje de las x, por ejemplo, en el punto 0.5 le corresponde los ángulos de 30°, 150° y todos los ángulos que se obtengan al sumar o restar 360°.

C. El valor de seno está definido para cualquier valor de x en que $-1 \le x \le 1$.



Para evitar confusiones, al referirnos a una determinada parte de las funciones trigonométricas inversas, definiremos para cada una de ellas un arco denominado **arco principal**. En el caso del seno, se representa en la figura con un trazo más grueso que se expresa así:

Función:	Rama principal:
$y = \text{arc sen } x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
	$90° \le y \le 90°$

Para las demás funciones se tiene:

$y = \text{arc cos } x$	$0 \le y \le \pi$
	$0° < y < 180°$
$y = \text{arc tan } x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
	$-90° < y < 90°$
$y = \text{arc cot } x$	$0 < y < \pi$
	$0° < y < 180°$
$y = \text{arc sec } x$	$-\pi \le y < -\frac{\pi}{2}$
	$-180° \le y < -90°$
	$0° \le y < \frac{\pi}{2}$
	$0° \le y < 90°$
$y = \text{arc csc } x$	$-\pi < y \le -\frac{\pi}{2}$
	$-180° < y \le -90°$
	$0° < y \le \frac{\pi}{2}$
	$0° < y \le 90°$

Derivada de la función arco seno

Debemos tener presente que:

$\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ Del formulario de trigonometría

$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

Sea $y = \text{arc sen } u$, en donde $u = f(x)$.

Escribimos el inverso del arc sen u:

$\text{sen } y = u$

Derivamos como implícita:

$$\frac{d}{dx}\text{sen } y = \frac{d}{dx}\ u$$

$$\cos y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\cos y} \qquad \textbf{(1)}$$

Como: $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$

$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

Sustituimos en **(1)**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} \qquad \textbf{(2)}$$

Como:

$\text{sen } y = u$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\text{sen}^2 y = u^2$

Sustituimos en **(2)**:

$$\frac{d}{dx}\text{arc sen}\, u = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \textbf{(18)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva:

  $y = \text{arc sen } 5x^2$

  $u = 5x^2$

  $u' = 10x$

  $$y' = \frac{10x}{\sqrt{1-(5x^2)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{1-25x^4}}$$

Derivada de la función arco coseno

Debemos tener presente que:

$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$

$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$

Sea $y = \operatorname{arc\,cos} u$, en donde $u = f(x)$

Escribimos el inverso de arc cos u:

$$\cos y = u$$

Derivamos como implícita:

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{du}{dx}$$

$$-\operatorname{sen} y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Despejamos y multiplicamos por -1 ambos miembros:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\operatorname{sen} y} \qquad \textbf{(1)}$$

Como:

$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$

$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$

Sustituyendo en **(1)**:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \qquad \textbf{(2)}$$

Como:

$\cos y = u$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\cos^2 y = u^2$

Sustituimos en **(2)**:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} u = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \textbf{(19)}$$

Ejemplo:

1. Deriva:

$$y = \text{arc}\cos\frac{x}{2}$$

$$u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$$

$$u' = \frac{1}{2}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Derivada de la función arco tangente

Debemos tener presente que:

$\sec^2 y\ 1 - \tan^2 y = 1$

$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$

Sea $y = \text{arc tan } u$, donde $u = f(x)$

Escribimos el inverso del arc tan u

$\tan y = u$

Derivamos como implícita:

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{du}{dx}$$

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sec^2 y} \qquad \textbf{(1)}$$

Como:

$\sec^2 y - \tan^2 y = 1$

$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$

Sustituimos en **(1)**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+\tan^2 y} \qquad \textbf{(2)}$$

Como:

$\tan y = u$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\tan^2 y = u^2$

Sustituimos en **(2)**:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\tan u = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2} \qquad \textbf{(20)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva:

$y = \operatorname{arc}\tan 3x^2$

$u = 3x^2$

$u' = 6x$

$$y' = \frac{6x}{1+(3x^2)^2} = \frac{6x}{1+9x^4}$$

Derivada de la función arco cotangente

Debemos tener presente que:

$\csc^2 y - \cot^2 y = 1$

$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y$

Sea $y = \operatorname{arc}\cot u$, donde $u = f(x)$.

Escribimos el inverso de arc cot u:

$\cot y = u$

Derivamos como implícita:

$$\frac{d}{dx}\cot y = \frac{du}{dx}$$

$$-\csc^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Despejamos y multiplicamos por (-1) ambos miembros:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\csc^2 y} \qquad \textbf{(1)}$$

Como:

$\csc^2 y - \cot^2 y = 1$

$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y$

Sustituimos en **(1)**:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+\cot^2 y} \qquad \textbf{(2)}$$

Como:

$\cot y = u$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\cot^2 y = u^2$

Sustituimos en **(2)**:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc}\cot u = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2} \qquad \textbf{(21)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva:

$$y = \operatorname{arc}\cot\frac{x}{2}$$

$$u = \frac{x}{2}$$

$$u' = \frac{1}{2}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+x^2}{4}} = -\frac{4}{2(4+x^2)} = -\frac{2}{4+x^2}$$

Derivada de la función arco secante

Debemos tener presente que:

$\sec^2 y - \tan^2 y = 1$

$\tan^2 y = \sec^2 y - 1$

$\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$

Sea $y = \operatorname{arc}\sec u$, en donde $u = f(x)$.

Escribimos el inverso de arc sec u:

$$\sec y = u$$

Derivamos como implícita:

$$\frac{d}{dx}\sec y = \frac{du}{dx}$$

$$\sec y \tan y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\sec y\tan y} \qquad \textbf{(1)}$$

Como:

$\tan^2 y=\sec^2 y-1$

$\tan y=\sqrt{\sec^2 y-1}$

Sustituimos en **(1)**:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{\sec y\sqrt{\sec^2 y-1}} \qquad \textbf{(2)}$$

Como:

$\sec y=u$

Elevamos al cuadrado de los dos miembros:

$\sec^2 y=u^2$

Sustituimos en **(2)**:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} u=\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}} \qquad \textbf{(22)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva:

$y=\text{arc sec }(3x+2)$

$u=3x+2$

$u'=3$

$$y'=\frac{3}{(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2-1}}=\frac{3}{(3x+2)\sqrt{9x^2+12x+3}}$$

Derivada de la función arco cosecante

Debemos tener presente que:

$\csc^2 y-\cot^2 y=1$

$\cot^2 y=\csc^2 y-1$

$\cot y=\sqrt{\csc^2 y-1}$

Sea $y=\text{arc csc }u$, en donde $u=f(x)$.

Escribimos el inverso de arc csc u:

$\csc y=u$

Derivamos como implícita:

$$\frac{d}{dx}\csc y = \frac{du}{dx}$$

$$-\csc y \cot y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Despejamos y multiplicamos por – 1 ambos miembros:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\csc y \cot y} \qquad \textbf{(1)}$$

Como:

$\cot^2 y = \csc^2 y - 1$

$\cot y = \sqrt{\csc^2 y - 1}$

Sustituimos en **(1)**:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\csc y\sqrt{\csc^2 y - 1}} \qquad \textbf{(2)}$$

Como:

$\cot y = u$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$\cot^2 y = u^2$

Sustituimos en **(2)**:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,csc} u = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2 - 1}} \qquad \textbf{(23)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva:

  $y = \text{arc csc } 2x$

  $u = 2x$

  $u' = 2$

  $$y' = -\frac{2}{2x\sqrt{4x^2 - 1}} = -\frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

Ejercicios resueltos

- **1.** $y = \text{arc sen } x^2$, expresión que es igual a $y = \text{sen}^{-1} x^2$

  Solución:

  $u = x^2$

  $u' = 2x$

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$$

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

2. $y = \cos^{-1}\frac{x}{a} = \operatorname{arc}\cos\frac{x}{a}$

Solución:

$$u = \frac{x}{a}$$

$$u' = \frac{1}{a}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

3. $y = \operatorname{arc}\cot\frac{x}{a}$

Solución:

$$u = \frac{x}{a}$$

$$u' = \frac{1}{a}$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} = -\frac{a^2}{a(a^2+x^2)}$$

$$y' = -\frac{a}{a^2+x^2}$$

4. $y = \tan^{-1}(6x^2-3)$

Solución:

$$u = 6x^2 - 3$$

$$u' = 12x$$

$$y' = \frac{12x}{1+(6x^2-3)^2}$$

■ **5.** $y = \operatorname{arc}\csc(x^2-1)$

Solución:

$$u = x^2 - 1$$

$$u' = 2x$$

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{(x^2-1)^2-1}} = -\frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{(x^4-2x^2+1)-1}}$$

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{x^4-2x^2}} = -\frac{2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2(x^2-2)}} = -\frac{2x}{(x^2-1)x\sqrt{x^2-2}} = -\frac{2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$$

■ **6.** $y = \operatorname{arc}\cot\frac{3x}{1-x}$

Solución:

$$u = \frac{3x}{1-x}$$

$$u' = \frac{(1-x)(3)-3x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{3-3x+3x}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$y' = -\frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{3x}{1-x}\right)^2} = -\frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{1+\frac{9x^2}{(1-x)^2}} = -\frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{\frac{(1-x)^2+9x^2}{(1-x)^2}}$$

$$= -\frac{3(1-x)^2}{(1-x)^2\left[(1-x)^2+9x^2\right]} = -\frac{3}{1-2x+x^2+9x^2}$$

$$y' = -\frac{3}{10x^2-2x+1}$$

■ **7.** $y = \operatorname{arc}\sec\sqrt{x^2+3}$

Solución:

$$u = \sqrt{x^2+3}$$

$$u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$y' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{(x^2+3)-1}}$$

$$y' = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+2}}$$

$$y' = \frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+2}}$$

■ **8.** $y = \operatorname{sen}^{-1}(3x+5x^3)$

Solución:

$$u = 3x+5x^3$$

$$u' = 3+15x^2$$

$$y' = \frac{3+15x^2}{\sqrt{1-(3x+5x^3)^2}}$$

Derivada de la suma de funciones

■ **9.** $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1} x$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = x & v = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ u' = 1 & v' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\ & v' = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array}$$

$$y' = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1) - x\left(-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{1-x^2} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{\dfrac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{1-x^2} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1-1+x^2}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)}$$

$$y' = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}$$

■ **10.** $y = \tan^{-1} 2x + \cot^{-1} 3x$

Solución:

$u = 2x$	$v = 3x$
$u' = 2$	$v' = 3$

$$y' = \frac{2}{1+(2x)^2} + \left(-\frac{3}{1+(3x)^2}\right)$$

$$y' = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{3}{1+9x^2}$$

Derivada de un producto de funciones

■ **11.** $y = x \arctan x^2$

Solución:

$u = x$	$v = arc\ \tan x^2$
$u' = 1$	$v' = \dfrac{2x}{1+(x^2)^2}$

$$y' = x\left(\frac{2x}{1+x^4}\right) + \arctan x^2$$

$$y' = \frac{2x^2}{1+x^4} + \arctan x^2$$

12. $y = x \operatorname{arc} \cos x$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = x & v = \operatorname{arc}\cos x \\ u' = 1 & v' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$y' = x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \operatorname{arc}\cos x\,(1)$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arc}\cos x$$

13. $y = x\tan^{-1}(x^2+1)$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = x & v = \tan^{-1}(x^2+1) \\ u' = 1 & v' = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2} \end{array}$$

$$y' = x\left[\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}\right] + \tan^{-1}(x^2+1)(1)$$

$$y' = \frac{2x^2}{1+(x^2+1)^2} + \tan^{-1}(x^2+1)$$

14. $y = 3x^2 \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = 3x^2 & v = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2} \\ u' = 6x & v' = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \end{array}$$

$$y' = 3x^2\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right) + \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}(6x)$$

$$y' = \frac{\frac{3}{2}x^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + 6x\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}$$

■ **15.** $y = 2\sqrt{x}\,\text{arc}\cot\sqrt{x}$

Solución:

$$u = 2\sqrt{x} \qquad v = \text{arc}\cot\sqrt{x}$$

$$u' = \frac{2}{2\sqrt{x}} \qquad v' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$y' = 2\sqrt{x}\left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}\right) + \text{arc}\cot\sqrt{x}\left(\frac{2}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\text{arc}\cot\sqrt{x}$$

Derivada del cociente de funciones

■ **16.** $y = \dfrac{\text{arc sen}\,x}{x}$

Solución:

$$u = \text{arc sen}\,x \qquad v = x$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v' = 1$$

$$y' = \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \text{arc sen}\,x(1)}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc sen}\,x}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x - \sqrt{1-x^2}\,\text{arc sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2}$$

$$y' = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\,\text{arc sen}\,x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

■ **17.** $y = \dfrac{\text{arc sen}\,4x}{\text{arc}\cos 4x}$

Solución:

$$u = \text{arc sen}\,4x \qquad v = \text{arc}\cos 4x$$

$$u' = \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}} \qquad v' = -\frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}}$$

$$y'=\frac{\text{arc cos }4x\left(\frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}}\right)-\text{arc sen }4x\left(-\frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}}\right)}{(\text{arc cos }4x)^2}$$

$$y'=\frac{\frac{4\,\text{arc cos }4x}{\sqrt{1-16x^2}}+\frac{4\,\text{arc sen }4x}{\sqrt{1-16x^2}}}{(\text{arc cos }4x)^2}$$

$$y'=\frac{\frac{4\,\text{arc cos }4x+4\,\text{arc sen }4x}{\sqrt{1-16x^2}}}{(\text{arc cos }4x)^2}$$

$$y'=\frac{4\,\text{arc cos }4x+4\,\text{arc sen }4x}{\sqrt{1-16x^2}\,(\text{arc cos }4x)^2}$$

■ **18.** $y=\frac{1}{\tan^{-1}x}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u=1 & v=\tan^{-1}x \\ u'=0 & v'=\frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$y'=\frac{\tan^{-1}x(0)-1\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{(\tan^{-1}x)^2}$$

$$y'=\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{(\tan^{-1}x)^2}$$

$$y'=-\frac{1}{(1+x^2)(\tan^{-1}x)^2}$$

Derivada de la potencia de funciones

■ **19.** $y=(\text{arc sen }4x)^2$

Solución:

$$y'=2\,\text{arc sen }4x\,\frac{d}{dx}\text{arc sen }4x$$

$$u = 4x$$

$$u' = 4$$

$$y' = 2\operatorname{arc\,sen} 4x \frac{4}{\sqrt{1-(4x)^2}}$$

$$y' = \frac{8\operatorname{arc\,sen} 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$$

■ **20.** $y = \left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)^3$

Solución:

$$y' = 3\left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

$$u = x^2 \qquad v = \frac{x}{2}$$

$$u' = 2x \qquad v' = \frac{1}{2}$$

$$y' = 3\left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)^2 \left[2x + 5\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}\right]$$

$$y' = 3\left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)^2 \left[2x + 5\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+x^2}{4}}\right]$$

$$y' = 3\left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)^2 \left[2x + 5\frac{4}{2(4+x^2)}\right]$$

$$y' = 3\left(x^2 + 5\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)^2 \left(2x + \frac{10}{4+x^2}\right)$$

■ **21.** $y = \operatorname{arc\,tan}(\tan x)$

Solución:

$$u = \tan x$$

$$u' = \sec^2 x(1)$$

$$y' = \frac{\sec^2 x(1)}{1+\tan^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = 1$$

dado que $1+\tan^2 x = \sec^2 x$

22. $y = \arccos(\operatorname{sen} 3x)$

Solución:

$$u = \operatorname{sen} 3x$$

$$u' = \cos 3x(3)$$

$$y' = -\frac{3\cos 3x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 3x}} = -\frac{3\cos 3x}{\sqrt{\cos^2 3x}}$$

como $1-\operatorname{sen}^2 3x = \cos^2 3x$

$$y' = -\frac{3\cos 3x}{|\cos 3x|}$$

23. $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$

Solución:

$$u = \operatorname{sen} x$$

$$u' = \cos x(1)$$

$$y' = \frac{\cos x(1)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

Por que $1-\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$

¡Aplícate!

Deriva las siguientes funciones:

1. $y = \operatorname{arc\,sen}(2x-5)$ **Sol.** $\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-5)^2}}$

2. $y = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a}$ **Sol.** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

3. $y = \text{arc sen}\, 5x$ **Sol.** $\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

4. $y = \text{arc sen}\sqrt{x}$ **Sol.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

5. $y = \cos^{-1}\dfrac{x}{3}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

6. $y = \text{arc sec}\dfrac{x}{2}$ **Sol.** $\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$

7. $y = \text{arc cot}\dfrac{x}{b}$ **Sol.** $-\dfrac{b}{b^2+x^2}$

8. $y = \text{arc sec}\dfrac{2}{x}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

9. $y = \text{arc csc}\, 3x$ **Sol.** $-\dfrac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}$

10. $y = \text{arc cos}\sqrt{x}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

Ejercicios de repaso

1. $y = x\,\text{sen}^{-1} 3x$ **Sol.** $\text{arc sen}\, 3x + \dfrac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$

2. $y = x^2\,\text{arc cos}\, 2x$ **Sol.** $2x\,\text{arc cos}\, 2x - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-4x^2}}$

3. $y = \text{arc tan}\sqrt{x}$ **Sol.** $2\sqrt{x}\;(1+x)$

4. $y = \text{arc sen}(3x-2)$ **Sol.** $\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x-2)^2}}$

5. $y = \text{arc cot}\, x^2$ **Sol.** $-\dfrac{2x}{1+x^4}$

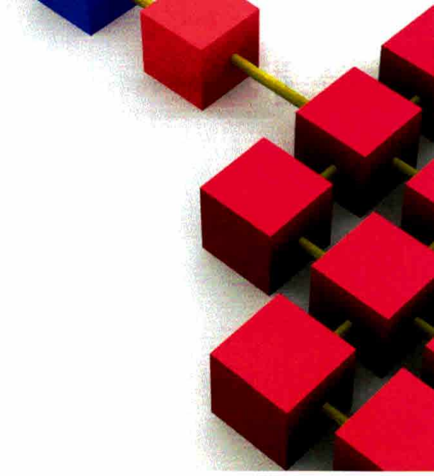
6. $y = \text{arc tan}\, ax^3$ **Sol.** $\dfrac{3ax^2}{1+a^2x^6}$

7. $y=\sec^{-1}\dfrac{3-x}{3}$ **Sol.** $-\dfrac{3}{(3-x)^2\sqrt{x^2-6x}}$

8. $y=\csc^{-1}\sqrt{1-2x}$ **Sol.** $\dfrac{1}{(1-2x)\sqrt{-2x}}$

9. $y=\operatorname{arc}\cot\dfrac{1+x}{1-x}$ **Sol.** $-\dfrac{1}{1+x^2}$

Capítulo 11



Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Logaritmos

A. Reglas fundamentales de los logaritmos de cualquier base:

1) $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

2) $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

3) $\log_a A^n = n\log_a A$

4) $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{\log_a A}{n}$

B. Las propiedades generales de los logaritmos establecen que en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es uno.

Conceptos clave

Derivada del logaritmo de una función

Derivada de la función exponencial

Ecuaciones exponenciales

Toda ecuación que contiene a la incógnita como exponente se le llama *exponencial.*

Ejemplo:

- **1.** $5^x = 625^2$

Ecuaciones logarítmicas

Toda ecuación que incluye el logaritmo de una función de la variable se le llama *ecuación logarítmica.*

Ejemplo:

- **1.** $\log_5 (x-3) + \log_5 x = 2$

El número *e*

Se utiliza en matemáticas para el estudio de diferentes fenómenos. Es un número irracional que se expresa así:

$$e = 2.718...$$

Y que se obtiene de:

$$\lim_{m\to 0}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{m\to 0}\left(1+m\right)^{\frac{1}{m}} = e = 2.718...$$

cuando $m = R^+$

Logaritmos vulgares o decimales

El sistema de logaritmos vulgares, decimales o de Briggs, es de base 10. Cuando se emplea este tipo de logaritmos se acostumbra omitir el número 10 de la base en la escritura abreviada del logaritmo de un número.

Logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos

Fueron inventados por Neper. Emplean, en lugar de la base 10, el número e y se rigen por las propiedades generales y fundamentales de los logaritmos de cualquier base.

Notaciones que se usan para los logaritmos de base 10 y de base *e*

Para distinguir los logaritmos vulgares de los naturales cuando la base no se indica utilizamos:

$\log u = \log_a u$ Para los vulgares.

$\log_e u = \ln u = Lu$ Para los naturales.

Derivada de $\log_a u$

Sea $y = \log_a u$, en donde $u = f(x)$

Como y y u están en función de x, cuando x se incrementa, entonces $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, de donde:

1. $y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u)$

2. $\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u$

   De acuerdo con la segunda de las reglas fundamentales de los logaritmos:

   $$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

   Escribimos:

   $A = (u + \Delta u)$

   $B = u$

   De donde:

   $$\Delta y = \log_a \left(\frac{u + \Delta u}{u} \right)$$

   Al segundo miembro lo multiplicamos por $\frac{\Delta u}{u}$ y lo dividimos entre $\frac{\Delta u}{u}$. Recuerda que para dividir podemos multiplicar por el recíproco del divisor:

   $$\Delta y = \log_a \left(\frac{u + \Delta u}{u} \right) \cdot \frac{\Delta u}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u}$$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u}{\Delta u} \log_a \left(\frac{u + \Delta u}{u} \right) \cdot \frac{\Delta u}{u \Delta x}$$

De acuerdo con la tercera regla fundamental de los logaritmos:

$$n \log_a A = \log_a A^n$$

Como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u}{\Delta u} \log_a \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right) \cdot \frac{\Delta u}{u\,\Delta x} = \log_a \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \cdot \frac{\Delta u}{u\,\Delta x}$$

Obtenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \cdot \frac{\Delta u}{u\,\Delta x}$$

Descomponemos $\dfrac{\Delta u}{u\,\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Como:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} = e$$

4. $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a e \cdot \frac{1}{u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$

De donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \textbf{(24)}$$

Ejemplo:

- **1.** Deriva $y = \log_a \dfrac{3}{x}$

Solución:

$$y = \log_a 3x^{-1}$$

$$u = 3x^{-1}$$

$$u' = -1(3)(x)^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

$$y' = \frac{\log_a e}{3x^{-1}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)$$

$$y' = -\frac{\log_a e}{x}$$

Derivada de $\log_e u$

Se puede expresar así:

$$\log_e u = \ln u = Lu$$

Sea $y = \log_e u$, de donde $u = f(x)$

En la fórmula **(21)**:

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

Escribimos $a = e$ y obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\log_e u = \frac{\log_e e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

Como en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es uno. Observa:

$$\log_e e = 1$$

De donde:

$$\frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{\frac{du}{dx}}{u} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(25)}$$

Ejemplos:

- **1.** Deriva $y = \ln(ax + 3)$

Solución:

$u = ax + 3$

$u' = a$

$$y' = \frac{a}{ax+3}$$

- **2.** Deriva $y = \ln(\ln x)$

Solución:

$u = \ln x$

$$u' = \frac{\frac{du}{dx}}{x} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{\frac{du}{dx}}{u} = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$$

Ejercicios resueltos

- **1.** $y = \ln(x+2)$

Solución:

$u = x + 2$

$u' = 1$

$$y' = \frac{1}{x+2}$$

- **2.** $y = \ln\left(\frac{x}{2} + 5x^2\right)$

Solución:

$$u = \frac{x}{2} + 5x^2$$

$$u' = \frac{1}{2} + 10x$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}+10x}{\frac{x}{2}+5x^2} = \frac{\frac{1+20x}{2}}{\frac{x+10x^2}{2}} = \frac{2(1+20x)}{2(x+10x^2)}$$

$$y' = \frac{1+20x}{x(1+10x)}$$

- **3.** $y = \ln(\operatorname{sen} 3x)$

Solución:

$u = \operatorname{sen} 3x$

$u' = \cos 3x(3)$

$$y' = \frac{3\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

- **4.** $y = \ln\cos\frac{x}{2}$

Solución:

$$u = \cos\frac{x}{2}$$

$$u' = -\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$$

5. $y = \ln(x^5 + 3x^2 + 2)$

Solución:

$u = x^5 + 3x^2 + 2$

$u' = 5x^4 + 6x$

$$y' = \frac{5x^4 + 6x}{x^5 + 3x^2 + 2}$$

$$y' = \frac{x(5x^3 + 6)}{x^5 + 3x^2 + 2}$$

6. $y = \ln\tan x$

Solución:

$u = \tan x$

$u' = \sec^2 x$

$$y' = \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

Como $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x}$$

7. $y = \ln(x^2 + 3)$

Solución:

$u = x^2 + 3$

$u' = 2x$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

8. $y = \ln(x^3 + x)$

Solución:

$u = x^3 + x$

$u' = 3x^2 + 1$

$$y' = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$$

$$y' = \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)}$$

9. $y = \ln\sqrt{7-x^2}$

Solución:

$$u = \sqrt{7-x^2} = (7-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = \frac{1}{2}(7-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$u' = -\frac{2x}{2\sqrt{7+x^2}}$$

$$u' = -\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}$$

$$y' = \frac{-\frac{x}{\sqrt{7-x^2}}}{\sqrt{7-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{7-x^2}\sqrt{7-x^2}}$$

$$y' = -\frac{x}{7-x^2}$$

10. $y = 5\ln(3x + 2)$

Solución:

$u = 3x + 2$

$u' = 3$

$$y' = \frac{5(3)}{3x+2}$$

$$y' = \frac{15}{3x+2}$$

Derivada de un producto de funciones

11. $y = x^3 \ln x$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = x^3 & v = \ln x \\ u' = 3x^2 & v' = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$$y' = x^3\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(3x^2) = x^2 + 3x^2 \ln x$$

$$y' = x^2(1 + 3\ln x)$$

12. $y = x \ln x$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = x & v = \ln x \\ u' = 1 & v' = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$$y' = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x(1)$$

$$y' = 1 + \ln x$$

Derivada del cociente de funciones

13. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x & v = x^2 \\ u' = \dfrac{1}{x} & v' = 2x \end{array}$$

$$y' = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x(2x)}{(x^2)^2}$$

$$y' = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

Derivada de la potencia de una función

14. $y = \ln^7 x$

$$y' = 7\ \ln^6 x \frac{d}{dx} \ln x$$

$$y' = \frac{7\ \ln^6 x}{x}$$

Derivadas en que se aplican las propiedades de los logaritmos para facilitar la derivación.

15. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}$

Solución:

Como el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los log, obtenemos:

$$y=\ln x-\ln(x+2)$$

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}$$

$$y'=\frac{2}{x(x+2)}$$

16. $y=\ln 3x\sqrt{x^2+5}$

Solución:

Como el logaritmo de un producto es igual a la suma de los log:

$$y=\ln 3x+\ln\sqrt{x^2+5}$$

$$y'=\frac{3}{3x}+\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2+5}\sqrt{x^2+5}}=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+5}=\frac{x^2+5+x^2}{x(x^2+5)}$$

$$y'=\frac{2x^2+5}{x(x^2+5)}$$

Nota: la derivada de $\ln\sqrt{x^2+5}$ se obtiene de la misma forma en que desarrollamos el ejemplo 10 de este apartado.

17. $y=\ln\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+4}$

Solución:

Con base en las propiedades de los log del producto y del cociente:

$y=\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x+4)$

Directamente en cada logaritmo identificamos u y desarrollamos u'.

$$y'=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$y'=\frac{x^2+8x+14}{(x+2)(x+3)(x+4)}$$

18. $y=\ln\dfrac{1+x^3}{1-x^3}$

Solución:

Como el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los log:

$$y=\ln(1+x^3)-\ln(1-x^3)$$

$$y'=\frac{3x^2}{1+x^3}-\frac{-3x^2}{1-x^3}=\frac{3x^2}{1+x^3}+\frac{3x^2}{1-x^3}$$

$$=\frac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1+x^3)(1-x^3)}=\frac{3x^2-3x^5+3x^2+3x^5}{1-x^6}$$

$$y'=\frac{6x^2}{1-x^6}$$

19. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Solución:

Como $\log_a\sqrt[n]{A}\ =\dfrac{\log_a A}{n}$, tenemos:

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2}\ln(1+x)$$

$$y'=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]=\frac{-\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{-\frac{1}{2}}{1+x}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}}{(1-x^2)}$$

$$y'=\frac{-1}{(1-x^2)}$$

$$y'=-\frac{1}{(1-x^2)}$$

Derivada de la función implícita

20. $5y-x^2+\ln(xy)=3$

Solución:

$$5\frac{dy}{dx}-2x+\frac{d}{dx}(\ln xy)=0$$

$$5\frac{dy}{dx}-2x+\frac{d}{dx}(\ln x+\ln y)=0$$

$$5\frac{dy}{dx}-2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\ =0$$

Dado que $\dfrac{dy}{dx} = y'$ escribimos:

$$5y' - 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' = 0$$

$$y'\left(5 + \frac{1}{y}\right) = 2x - \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{2x - \frac{1}{x}}{5 + \frac{1}{y}}$$

$$y' = \frac{\frac{2x^2 - 1}{x}}{\frac{5y + 1}{y}} = \frac{2x^2y - y}{5xy + x}$$

21. $\ln(x^2 - y^2) = xy$

Solución:

$$\frac{2x - 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 - y^2} = x\frac{dy}{dx} + y$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = x^3\frac{dy}{dx} + x^2y - xy^2\frac{dy}{dx} - y^3$$

$$2x - x^2y + y^3 = x^3\frac{dy}{dx} - xy^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2x - x^2y + y^3 = \frac{dy}{dx}(x^3 - xy^2 + 2y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2y + y^3}{x^3 - xy^2 + 2y}$$

Observa la diferencia:

En el ejercicio 11 de este apartado, $y = x^3 \ln x$ es el producto de dos funciones y no el logaritmo de un producto.

Derivada de la función exponencial a^u

Sea $y = a^u$, en donde $u = f(x)$

Por ser una función exponencial aplicamos logaritmos a los dos miembros de la ecuación:

$$\ln y = u \ln a$$

A continuación la derivamos como función implícita, desarrollamos el primer miembro con la fórmula **(22)** y el segundo con la fórmula **(5)**:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = u\underbrace{\frac{da}{dx}}_{0} + \ln a\frac{du}{dx}$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \ln a\frac{du}{dx}$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx} = y\ln a\frac{du}{dx}$$

Como:

$y = a^u$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(26)}$$

Ejemplo:

1. Deriva $y = 10^{(x^2+5x-6)}$

Solución:

$u = x^2 + 5x - 6$

$u' = 2x + 5$

$y' = 10^{(x^2+5x-6)}(\ln 10)(2x+5)$

$y' = (2x+5)10^{(x^2+5x-6)}\ln 10$

Derivada de la función exponencial e^u

Sea $y = e^u$, en donde $u = f(x)$

En la fórmula **(23)**:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$$

Escribimos $a = e$ y obtenemos:

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u \ln e\frac{du}{dx}$$

Como en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es uno. Observa:

$\ln e = 1$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(27)}$$

Ejemplo:

1. Deriva $y = e^{x^3}$

Solución:

$u = x^3$

$u' = 3x^2$

$y' = e^{x^3}(3x^2)$

Ordenamos y queda así:

$y' = 3x^2 e^{x^3}$

Ejercicios resueltos

1. $y = e^{(2x^3)^{\frac{1}{2}}}$

Solución:

$$u = (2x^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = \frac{1}{2}(2x^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} 2x^3$$

$$u' = \frac{1}{2}(2x^3)^{-\frac{1}{2}} 6x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3}} = \frac{3x^2}{x\sqrt{2x}} = \frac{3x}{\sqrt{2x}}$$

$$y' = e^{(2x^3)^{\frac{1}{2}}} \frac{3x}{\sqrt{2x}}$$

$$y' = \frac{3xe^{\sqrt{2x^3}}}{\sqrt{2x}}$$

2. $y = e^{-3x+4}$

Solución:

$u = -3x + 4$

$u' = -3$

$y' = e^{-3x+4}(-3)$

$y' = -3e^{-3x+4}$

3. $y' = 7^{4x+x^3}$

Solución:

$u = 4x + x^3$

$u' = 4 + 3x^2$

$y' = 7^{(4x+x^3)} \ln 7(4+3x^2)$

$y' = (4+3x^2)7^{4x+x^3} \ln 7$

4. $y = 10^{(x^2 + 5x - 6)}$

Solución:

$u = x^2 + 5x - 6$

$u' = 2x + 5$

$y' = 10^{(x^2 + 5x - 6)} \ln 10(2x + 5)$

$y' = (2x + 5)10^{(x^2 + 5x - 6)} \ln 10$

5. $y = 4^{x^{-2}}$

Solución:

$u = x^{-2}$

$u' = -2x^{-3}$

$y' = 4^{x^{-2}} \ln 4(-2x^{-3})$

$y = (-2x^{-3})4^{x^{-2}} \ln 4$

6. $y = e^{\sec 2x}$

Solución:

$u = \sec 2x$

$u' = 2 \sec 2x \tan 2x$

$y' = e^{\sec 2x} 2 \sec 2x \tan 2x$

7. $y = e^{\cos^2 3x}$

Solución:

$u = \cos^2 3x$

$u' = 2 \cos 3x \dfrac{d}{dx} \cos 3x$

$y' = 2e^{\cos^2 3x}(-3 \operatorname{sen} 3x) \cos 3x$

$y' = -6 \operatorname{sen} 3x \cos 3x \; e^{\cos^2 3x}$

8. $y = e^{\csc 3x}$

Solución:

$u = \csc 3x$

$u' = -\cot 3x \csc 3x\,(3)$

$u' = -3\cot 3x \csc 3x$

$y' = e^{\csc 3x}(-3\cot 3x \csc 3x)$

$y' = -3\cot 3x \csc 3x\, e^{\csc 3x}$

9. $y = e^{\operatorname{arc\,sen} x^2}$

Solución:

$u = \operatorname{arc\,sen} x^2$

$$u' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$y' = e^{\operatorname{arc\,sen} x^2}\,\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$y' = \frac{2x\, e^{\operatorname{arc\,sen} x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$$

10. $y = e^{-\frac{x}{2}}$

Solución:

$$y' = e^{-\frac{x}{2}}\,\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$u = -\frac{x}{2}$$

$$u' = -\frac{1}{2}$$

$$y' = e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

■ **11.** $y = a^{4x^2}$

Solución:

$$y' = a^{4x^2}(\ln a)\frac{d}{dx}4x^2$$

$$u = 4x^2$$

$$u' = 8x$$

$$y' = a^{4x^2}\ln a(8x)$$

$$y' = 8x\,a^{4x^2}\ln a$$

Derivada de un producto de funciones

■ **12.** $y = e^x(x^3 + 4)$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = e^x & v = x^3 + 4 \\ u' = e^x(1) & v' = 3x^2 \end{array}$$

$$y' = e^x(3x^2) + (x^3 + 4)e^x(1)$$

Factorizamos:

$$y' = e^x(x^3 + 3x^2 + 4)$$

■ **13.** $y = x^5 e^{3x^2}$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = x^5 & v = e^{3x^2} \\ u' = 5x^4 & v' = 6x\left(e^{3x^2}\right) \end{array}$$

$$y' = x^5(6x)e^{3x^2} + e^{3x^2}(5x^4)$$

Factorizamos:

$$y' = e^{3x^2}(6x^6 + 5x^4)$$

■ **14.** $y = x^n\,e^{\operatorname{sen}2x}$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} u = x^n & v = e^{\operatorname{sen}2x} \\ u' = nx^{n-1} & v' = \cos 2x(2)e^{\operatorname{sen}2x} \end{array}$$

$$y' = x^n\left(2\cos 2x\,e^{\operatorname{sen}2x}\right) + e^{\operatorname{sen}2x}\left(nx^{n-1}\right)$$

Derivada de un cociente de funciones

15. $y=\dfrac{e^x+3}{e^x+7}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u=e^x+3 & v=e^x+7 \\ u'=e^x & v'=e^x \end{array}$$

$$y'=\frac{(e^x+7)e^x-(e^x+3)e^x}{(e^x+7)^2}$$

Factorizamos:

$$y'=\frac{e^x(e^x+7-e^x-3)}{(e^x+7)^2}$$

$$y'=\frac{e^x(4)}{(e^x+7)^2}$$

$$y'=\frac{4e^x}{(e^x+7)^2}$$

16. $y=\dfrac{e^{2x}}{x^2-3}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u=e^{2x} & v=x^2-3 \\ u'=2e^{2x} & v'=2x \end{array}$$

$$y'=\frac{(x^2-3)(2e^{2x})-e^{2x}(2x)}{(x^2-3)^2}$$

Factorizamos:

$$y'=\frac{e^{2x}(2x^2-6-2x)}{(x^2-3)^2}$$

$$y'=\frac{e^{2x}(2x^2-2x-6)}{(x^2-3)^2}$$

17. $y=\dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^{3x}-e^{-3x}}$

Solución:

$$\begin{array}{l|l} u=e^{3x}+e^{-3x} & v=e^{3x}-e^{-3x} \\ u'=3(e^{3x}-e^{-3x}) & v'=3(e^{3x}+e^{-3x}) \end{array}$$

$$y'=\frac{(e^{3x}-e^{-3x})(3)(e^{3x}-e^{-3x})-(e^{3x}+e^{-3x})(3)(e^{3x}+e^{-3x})}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

Factorizamos:

$$y'=\frac{3\left[\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2-\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)^2\right]}{\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2}$$

$$y'=\frac{3\left(e^{6x}-2+e^{-6x}-e^{6x}-2-e^{-6x}\right)}{\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2}$$

$$y'=\frac{3(-2-2)}{\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2}$$

$$y'=-\frac{12}{\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2}$$

18. $y=e^{-2x}$

Solución:

$u=-2x$

$u'=-2$

$y'=-2e^{-2x}$

Derivada de la potencia de funciones

19. $y=(e^{2x}+7x)^2$

Solución:

$$y'=2(e^{2x}+7x)\frac{d}{dx}(e^{2x}+7x)$$

$u=e^{2x}+7x$

$u'=2e^{2x}+7$

$y'=2(e^{2x}+7x)(2e^{2x}+7)$

$y'=2(2e^{4x}+14x\,e^{2x}+7e^{2x}+49x)$

20. $y=\sqrt[3]{e^{3x}+7}$

Solución:

$$y=\sqrt[3]{e^{3x}+7}=\left(e^{3x}+7\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y'=\frac{1}{3}\left(e^{3x}+7\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\left(e^{3x}+7\right)$$

$u=e^{3x}+7$

$u'=3e^{3x}$

$$y'=\frac{1}{3}\left(e^{3x}+7\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3e^{3x}\right)$$

$$y' = \frac{3e^{3x}}{3\left(e^{3x}+7\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{e^{3x}}{\sqrt[3]{(e^{3x}+7)^2}}$$

■ **21.** $y = \ln\left[(e^{3x} - e^{-7x})\right]^{\frac{1}{2}}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\ln(e^{3x} - e^{-7x})\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left[\ln(e^{3x} - e^{-7x})\right]$$

$$u = \ln(e^{3x} - e^{-7x})$$

$$u' = \frac{3e^{3x} + 7e^{-7x}}{e^{3x} - e^{-7x}}$$

$$y' = \frac{\frac{3e^{3x} + 7e^{-7x}}{e^{3x} - e^{-7x}}}{2\left[\ln(e^{3x} - e^{-7x})\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{3e^{3x} + 7e^{-7x}}{2(e^{3x} - e^{-7x})\sqrt{\ln(e^{3x} - e^{-7x})}}$$

■ **22.** $y = e^{e^{3x}}$

Solución:

$$u = e^{3x}$$

$$u' = 3e^{3x}$$

$$y' = e^{e^{3x}} 3e^{3x}$$

$$y' = 3e^{3x} e^{e^{3x}}$$

■ **23.** $y = ne^{\sqrt[5]{x^2}}$

Solución:

$$y = ne^{\sqrt[5]{x^2}} = ne^{x^{\frac{2}{5}}}$$

$$u = x^{\frac{2}{5}}$$

$$y' = ne^{x^{\frac{2}{5}}}\left(\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\right)$$

$$y' = \frac{2ne^{x^{\frac{2}{5}}}}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

24. $y = \ln\left[\left(e^{x^2+4}\right)\left(e^{7x^3-8}\right)\right]$

Solución:

Como el logaritmo de un producto es igual a la suma de los log:

$$y = \ln e^{x^2+4} + \ln e^{7x^3-8}$$

$u = x^2 + 4$	$v = 7x^3 - 8$
$u' = 2x$	$v' = 21x^2$

$$y' = \frac{2xe^{x^2+4}}{e^{x^2+4}} + \frac{21x^2e^{7x^3-8}}{e^{7x^3-8}}$$

$$y' = 2x + 21x^2$$

25. $y = \ln\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^3} - 7}$

Solución:

Como el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los log:

$$y = \ln e^{x^2} - \ln(e^{x^3} - 7)$$

$u = e^{x^2}$	$v = e^{x^3} - 7$
$u' = 2xe^{x^2}$	$v' = 3x^2e^{x^3}$

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} - \frac{3x^2e^{x^3}}{e^{x^3} - 7}$$

$$y' = 2x - \frac{3x^2e^{x^3}}{e^{x^3} - 7}$$

Derivada de una función implícita

26. $3y^2 - xe^y = 7x + 5$

Solución:

$$6y\frac{dy}{dx} - \left(xe^y\frac{dy}{dx} + e^y\right) = 7$$

$$6y\frac{dy}{dx} - xe^y\frac{dy}{dx} - e^y = 7$$

$$\frac{dy}{dx}(6y - xe^y) = 7 + e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7 + e^y}{6y - xe^y}$$

27. $y^4 = e^{x+2y}$

Solución:

$$4y^3\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}\left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} = e^{x+2y} + 2e^{x+2y}\frac{dy}{dx}$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 2e^{x+2y}\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx}(4y^3 - 2e^{x+2y}) = e^{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+2y}}{4y^3 - 2e^{x+2y}}$$

28. $y^2 = e^{x+3y}$

Solución:

$$2y\frac{dy}{dx} = \left(1 + 3\frac{dy}{dx}\right)e^{x+3y}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+3y} + 3e^{x+3y}\frac{dy}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - 3e^{x+3y}\frac{dy}{dx} = e^{x+3y}$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - 3e^{x+3y}) = e^{x+3y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+3y}}{2y - 3e^{x+3y}}$$

■ **29.** $x^4 - y = e^{\frac{2x}{y}}$

Solución:

$$4x^3 - \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y - 2x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)e^{\frac{2x}{y}}$$

$$y^2\left(4x^3 - \frac{dy}{dx}\right) = \left(2y - 2x\frac{dy}{dx}\right)e^{\frac{2x}{y}}$$

$$4x^3y^2 - y^2\frac{dy}{dx} = 2ye^{\frac{2x}{y}} - 2xe^{\frac{2x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$2xe^{\frac{2x}{y}}\frac{dy}{dx} - y^2\frac{dy}{dx} = 2ye^{\frac{2x}{y}} - 4x^3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2xe^{\frac{2x}{y}} - y^2\right) = 2ye^{\frac{2x}{y}} - 4x^3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ye^{\frac{2x}{y}} - 4x^3y^2}{2xe^{\frac{2x}{y}} - y^2}$$

¡Aplícate!

Deriva las siguientes fracciones:

1. $y = \ln(3x+b)^2$ **Sol.** $\frac{6}{3x+b}$

2. $y = \ln(ax+2)$ **Sol.** $\frac{a}{ax+2}$

3. $y = \ln(3x^2+b)$ **Sol.** $\frac{6x}{3x^2+b}$

4. $y = \ln 2x^n$ **Sol.** $\frac{n}{x}$

5. $y = \ln(2x^3 - 3x^2 + 5)$ **Sol.** $\frac{6x(x-1)}{2x^3-3x^2+5}$

6. $y = \log\frac{3}{x}$ **Sol.** $-\frac{\log e}{x}$

7. $y=\ln\dfrac{x^2}{3+x^2}$ **Sol.** $\dfrac{6}{x(3+x^2)}$

8. $y=\ln\sqrt{3-2x^2}$ **Sol.** $-\dfrac{2x}{3-2x^2}$

9. $y=2x\ln x$ **Sol.** $2+2\ln x$

10. $y=e^{2x}$ **Sol.** $2e^{2x}$

Ejercicios de repaso

1. $y=7^{nx}$ **Sol.** $n7^{nx}\ln 7$

2. $y=\dfrac{3}{e^x}$ **Sol.** $-\dfrac{3e^x}{e^{2x}}$

3. $y=e^{x^2}$ **Sol.** $2x\ e^{x^2}$

4. $y=\ln(x^3+1)$ **Sol.** $\dfrac{3x^2}{x^3+1}$

5. $f(t)=\ln(\ln\tan t)$ **Sol.** $\dfrac{\sec^2 t}{\tan t\ln\tan t}$

6. $f(t)=e^{\operatorname{sen}3t}$ **Sol.** $3e^{\operatorname{sen}3t}\cos 3t$

7. $f(t)=e^{-t}\cos t$ **Sol.** $-\dfrac{\cos t+\operatorname{sen}t}{e^t}$

8. $y=e^{\operatorname{sen}2x}$ **Sol.** $2e^{\operatorname{sen}2x}\cos 2x$

9. $y=\log(2x+1)$ **Sol.** $\dfrac{2\log e}{2x+1}$

10. $y=\ln(x-1)$ **Sol.** $\dfrac{1}{x-1}$

11. $y=\ln 2x^3$ **Sol.** $\dfrac{3}{x}$

12. $y=L\left(x^2+2x-3\right)^3$ **Sol.** $\dfrac{6(x+1)}{x^2+2x-3}$

13. $y=\ln\sqrt{1-x^2}$ **Sol.** $\dfrac{x}{x^2-1}$

14. $y=x\ln x-2x$ **Sol.** $\ln x-1$

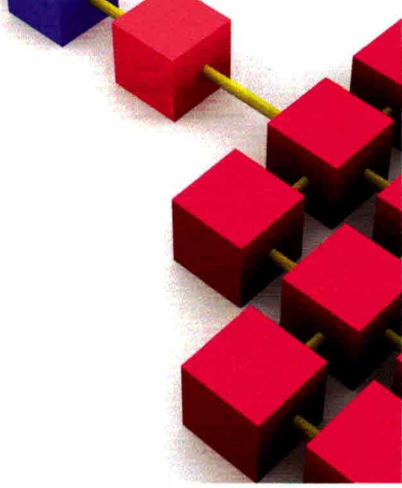
15. $y = e^{\tan x}$ **Sol.** $e^{\tan x} \sec^2 x$

16. $y = \ln \operatorname{sen} 2x$ **Sol.** $2 \cot 2x$

17. $f(x) = \ln x^4$ **Sol.** $\frac{4}{x}$

18. $f(x) = x \ln x$ **Sol.** $1 + \ln x$

19. $f(x) = \ln \sec 2x$ **Sol.** $2 \tan 2x$



Capítulo 12

La derivada como razón de cambio (rapidez de cambio)

Razón

Razón significa comparar dos cantidades por cociente.

La función $y = f(x)$ relaciona dos cantidades: x y y, en donde un cambio en el valor de x induce un cambio en el valor de y.

Conceptos clave

Razón

Razón instantánea de cambio

Razones de cambio relacionadas

Ejemplo:

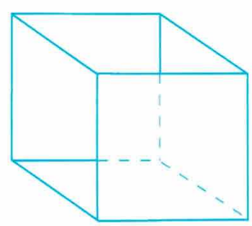
- **1.** Si tenemos $y = x^3$, esta expresión corresponde a la fórmula para obtener el volumen de un cubo, donde y es el volumen y x equivale a la longitud del lado.

  Consideremos inicialmente que:

  $x = 4$

  $y = x^3$

  $y = 4^3 = 64\ u^3$



Si damos un pequeño incremento a x (longitud) se expresa con Δx. Así, el nuevo volumen es:

$$y = (4 + \Delta x)^3$$

Si queremos medir el cambio en el valor del volumen y se tiene que:

$\Delta y = (4 + \Delta x)^3 - 4^3$ (Valor final menos valor inicial)

Para comparar el cambio de volumen que se incrementó de x a Δx, lo obtenemos si calculamos la razón que hay entre Δy y el Δx, lo que se expresa así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El valor de esta razón depende del valor de Δx, pero si Δx se aproxima a cero, entonces al resultado del límite $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se conoce como razón instantánea de cambio de y con respecto a x.

En este ejemplo, cuando $x = 4$, desarrollamos:

$$\Delta y = (4 + \Delta x)^3 - 4^3 = 64 + 48(\Delta x) + 12(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 64$$

$$= 48(\Delta x) + 12(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

Dividimos ambos miembros entre Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 48 + 12\Delta x + (\Delta x)^2$$

Así, obtenemos el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[48 + 12\Delta x + (\Delta x)^2\right] = 48$$

El resultado señala que cuando el lado del cubo es 4, la razón del cambio del volumen con respecto al lado es 48. Esto significa que para lados próximos a 4, el cambio Δy en el volumen es aproximadamente 48 veces el cambio en el lado x.

Conclusión:

Sea una función $y = f(x)$. Incrementamos el valor de x, que se expresa así:

$$x + \Delta x$$

El nuevo valor de y es:

$$f(x + \Delta x)$$

El incremento de y es:

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (Valor final menos valor inicial)

La razón de cambio del valor de la función queda así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La razón instantánea de cambio de y con respecto a x se define como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Donde la razón instantánea de cambio es igual a la derivada; o sea que cuando $\Delta x \to 0$, el $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es $f'(x)$.

El problema citado anteriormente: obtener la razón de cambio del volumen de un cubo $y = x^3$ cuando la longitud de su lado es de 4 unidades, se resuelve en la forma siguiente:

$y = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

Para $x = 4$

$f'(4) = 48\, u^3$ que es el mismo resultado que se obtuvo en el proceso del apartado anterior.

Razones relacionadas

Las cantidades que intervienen en muchas de las actividades que realizamos varían en el transcurso del tiempo; por ejemplo, la intensidad de la corriente en un circuito eléctrico o bien, el aumento o disminución por unidad de tiempo de la reproducción en un cultivo de microbios.

Si dos de estas cantidades se relacionan por una ecuación y si se conoce la razón por la que cambia una de ellas, entonces si derivamos la ecuación con respecto al tiempo podremos obtener la razón con la que cambia la otra cantidad.

Este tipo de problemas se presentan generalmente con dos variables: x y y, cada una en función del tiempo t ; esto se expresa así:

$$x = f(t)$$

$$y = f(t)$$

Si x y y se relacionan entre sí por medio de una ecuación; por ejemplo:

$$2x - y^3 + 5x^2 + 4 = 0$$

Si derivamos con respecto a t, obtendremos:

$$2\frac{dx}{dt} - 3y^2\frac{dy}{dt} + 10x\frac{dx}{dt} = 0$$

Las derivadas $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se llaman **razones de cambio relacionadas**, ya que efectivamente están relacionadas a través de una ecuación; el resultado de la derivada podemos utilizarlo para obtener el valor de una de las razones cuando conocemos el valor de la otra. Esto permite resolver muchos problemas de aplicación práctica.

Para resolver este tipo de problemas te recomendamos:

A. Elaborar un esquema con los nombres que se dan a las variables.

B. Escribir una ecuación que relacione a las variables del problema.

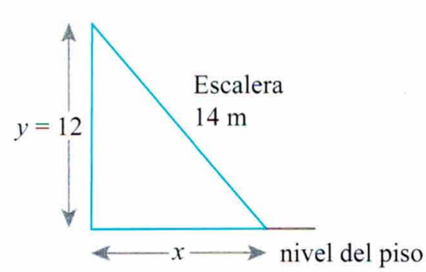
C. Derivar.

D. Sustituir con los valores de las variables en los últimos pasos de la solución.

Ejercicios resueltos

1. Una escalera de 14 m de largo está recargada contra un edificio vertical. La base de la escalera resbala horizontalmente a razón de 4 metros por segundo. ¿Con qué rapidez resbala el otro extremo de la escalera cuando se encuentra a 12 m arriba del suelo?

- La variable x representa la distancia de la base del edificio a la base de la escalera.



- La variable y representa la altura sobre el suelo del otro extremo de la escalera.

Solución:

Como x aumenta a razón de 4 metros por segundo, tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 4 \text{ m/seg}$$

Debemos obtener $\frac{dy}{dx}$, o sea la razón de cambio de la altura del extremo superior de la escalera en el momento en que $y = 12$ m. Con el teorema de Pitágoras relacionamos x y y. Aplicado al triángulo de la figura anterior:

$$x^2 + y^2 = (14)^2 = 196$$

Derivando respecto a t:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

De donde resulta:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

La expresión $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$ es la fórmula que relaciona las dos razones de cambio del problema.

Consideremos ahora el caso especial en que $y = 12$. El valor correspondiente a x puede obtenerse a partir de:

$$x^2 + 144 = 196$$

$$x^2 = 196 - 144 = 52$$

$$x = \pm\sqrt{52} = \pm 7.2$$

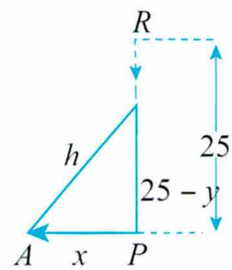
Tomamos $x = 7.2$ cuando $y = 12$ y sustituimos en la fórmula:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{7.2}{12}(4) = -2.4 \text{ m/seg}$$

Nota: el signo menos indica que la distancia está disminuyendo.

2. A las 11:00 a.m. una lancha A se encuentra a 25 kilómetros al sur de la lancha B. La lancha A navega hacia el oeste a razón de 16 km/h y la B navega hacia el sur a 20 km/h. Determina la razón de cambio de la distancia entre las dos lanchas a las 11:30 a.m.

Solución:



A las 11:00 a.m. las lanchas se encuentran en P y en R. A las 11:30 a.m. la lancha A ha recorrido hacia el oeste x número de kilómetros, mientras que la lancha B ha recorrido hacia el sur y número de kilómetros.

La diferencia entre las 11:00 a.m. y las 11:30 a.m. la designamos con t, y la distancia entre las lanchas con h.

Por medio del teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2 = x^2 + (25 - y)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Derivamos respecto a t:

$$2h\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(25 - y)\left(-\frac{dy}{dt}\right)$$

Despejamos:

$$h\frac{dh}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (25 - y)\left(-\frac{dy}{dt}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Tenemos, según los datos del problema:

$$\frac{dx}{dt} = 16 \text{ km/h}$$

$$\frac{dy}{dt} = 20 \text{ km/h}$$

A las 11:30 a.m. las lanchas han navegado durante 30 minutos y su velocidad es de 16 km/h y de 20 km/h, respectivamente. En la mitad del tiempo recorrieron la mitad de la distancia, de donde, en ese momento, los valores son:

$x = 8$

$y = 10$

$25 - y = 15$

Sustituimos en **(1)**:

$$h^2 = 64 + 225 = 289$$

$$h = \pm\sqrt{289} = 17$$

Sustituimos en **(2)**:

$$h\frac{dh}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (25 - y)\left(-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$17\frac{dh}{dt}=8(16)+(15)(-20)$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{172}{17}=-10.12 \text{ km/h}$$

El signo menos indica que la distancia entre las lanchas disminuye gradualmente.

3. Una persona de 1.60 metros de estatura corre alejándose de un poste de alumbrado que tiene una altura de 8 metros. Si se desplaza a razón de 4 metros por segundo, ¿qué tan rápido cambia la longitud de la sombra?

Solución:

Por geometría, los triángulos ABE y ACD son semejantes, de donde:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}}$$

Sustituimos:

$$\frac{y}{y+x}=\frac{1.60}{8} \qquad \textbf{(1)}$$

Desarrollamos **(1)**:

$$8y = 1.60(y + x)$$

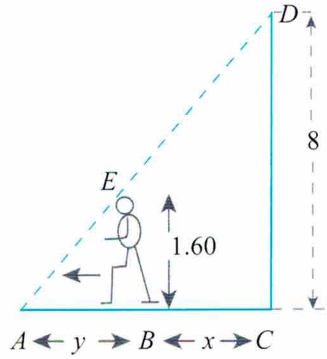
$$8y = 1.60y + 1.60x$$

$$y = .20y + .20x$$

$$y - .20y = .20x$$

$$.80y = .20x$$

$$y=\frac{.2x}{.8}$$



Multiplicamos por 10 el numerador y denominador:

$$y=\frac{x}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

Derivamos **(2)** respecto a t:

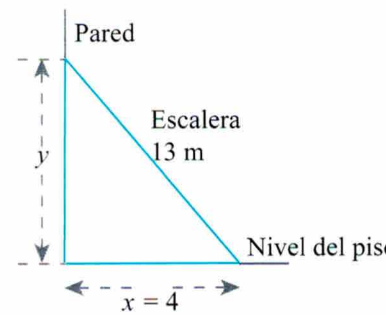
$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$$

Como la persona se aleja a una razón de cambio de 4 m/seg, x se incrementa con esa razón, de donde:

$$\frac{dx}{dt} = 4 \text{ m/seg}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}(4) \text{ m/seg} = 1 \text{ m/seg}$$

4. Una escalera de 13 metros de largo está recargada contra una pared vertical. La base de la escalera resbala horizontalmente alejándose de la base de la pared a razón de 2 metros por segundo. ¿Con qué rapidez resbala hacia abajo de la pared la parte alta de la escalera cuando la parte baja de la misma se encuentra a 4 metros de aquélla?



Solución:

La variable x representa la distancia de la base de la pared a la base de la escalera; la variable y es la altura sobre el suelo del otro extremo de la escalera.

Desarrollamos:

Como x aumenta a razón de 2 m por segundo, tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/seg}$$

Debemos obtener:

$$\frac{dy}{dt} \text{ cuando } x = 4$$

Con el teorema de Pitágoras relacionamos x y y aplicado al triángulo de la figura:

$$x^2 + y^2 = (13)^2 = 169$$

Derivamos respecto a t:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

De donde:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Consideremos ahora el caso especial en que $x = 4$ y el valor que corresponde a y lo obtenemos en:

$$16 + y^2 = 169$$

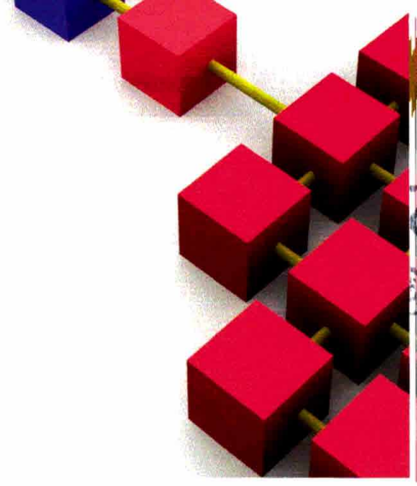
$$y^2 = 169 - 16 = 153$$

$$y = \pm\sqrt{153}$$

Tomamos el valor positivo cuando sustituimos en **(1)**:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{\sqrt{153}}(2) = \frac{-8}{\sqrt{153}} = -\frac{8}{12.4} = -.6 \text{ m/seg}$$

La parte alta de la escalera baja a razón de .6 m/seg cuando la parte baja de la misma está a 4 m de la pared.



Capítulo 13

Aplicaciones geométricas

Significado geométrico de la derivada

Pendiente de la curva en uno de sus puntos.

Al establecer el concepto de derivada señalamos que su valor, en cualquier punto de una curva, es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

Obtuvimos también la expresión:

$$m = \tan \alpha = \tan_{\Delta x \to 0} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esto nos permite resolver problemas como el siguiente:

Ejemplo:

1. Calcula el valor de la pendiente m de la parábola $y = x^2$ en los puntos de coordenadas (3, 9).

Solución:

Derivamos:

$y = x^2$

$y' = 2x$

La cual es la pendiente de cualquier punto.

Como nos interesa obtener el valor de la pendiente m en el punto $x = 3$, sustituimos:

$m = 2x = 2\,(3) = 6$

Si queremos determinar el valor del ángulo de la pendiente usamos las tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas o una calculadora.

Así, tenemos:

$\tan\ \alpha\ =\ 6$

$\alpha\ =\ 80°32$

Conceptos clave

- Tangente de una curva
- Normal
- Longitud de tangente
- Longitu de la normal
- Longitud de la subtangente
- Longitud de la subnormal
- Ángulo de intersección de dos curvas

Ecuación de la tangente a una curva plana

En geometría analítica demostramos que una recta que pasa por un punto (x_1, y_1) y dada su pendiente m se representa por la relación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Como la derivada de una función es la pendiente m de la curva que representa, si aplicamos la relación punto-pendiente podemos obtener la ecuación de la recta tangente en un punto dado.

Ejemplo:

1. Determina la ecuación de la tangente a la curva $y = 2x^3 - x^2 + 2x - 12$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

Calculamos la derivada:

$y' = 6x^2 - 2x + 2$

Calculamos el valor de la pendiente m en el punto $x = 2$.

$f'(x) = 6x^2 - 2x + 2$

$f'(2) = 6(2)^2 - 2(2) + 2 = 24 - 4 + 2 = 22$

$m = 22$

Para aplicar la relación punto-pendiente necesitamos el valor de la ordenada y, que obtenemos en la función original cuando la variable independiente $x = 2$.

$y = 2x^3 - x^2 + 2x - 12$

$f(2) = 2(2)^3 - 2^2 + 2(2) - 12 = 16 - 4 + 4 - 12 = 4$

$y = 4$

Las coordenadas del punto de contacto (x_1, y_1) son (2, 4). Sustituimos en la relación punto-pendiente:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Con:

$m = 22$

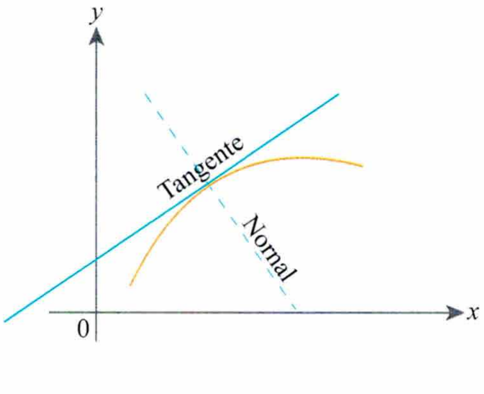
$x_1 = 2$

$y_1 = 4$

$y - 4 = 22\ (x - 2)$

$y - 4 = 22x - 44$

$22x - y - 40 = 0$ **Ecuación de la recta tangente.**



Ecuación de la normal

La recta perpendicular a la tangente en su punto de contacto se denomina *normal* a la curva en dicho punto:

La pendiente de la tangente es m. En tu curso de geometría analítica aprendiste que la pendiente de una recta perpendicular a ella es:

$$-\frac{1}{m}$$

De donde, mediante sustitución en la relación punto-pendiente:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Obtenemos:

$y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$, que es la relación para obtener la normal.

Sigamos con el ejemplo anterior:

Debemos obtener la ecuación de la tangente y la normal a la curva:

$y = 2x^3 - x^2 + 2x - 12$ en el punto de abscisa $x = 2$

Ya derivamos y calculamos la pendiente $m = 22$, y obtuvimos el valor de $y = 4$ cuando $x = 2$. Ahora calcularemos la ecuación de la normal si sustituimos en:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

con $-\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{22}; \quad x_1 = 2; \quad y_1 = 4$

$$y - 4 = -\frac{1}{22}(x - 2)$$

$$22y - 88 = -x + 2$$

$x + 22y - 90 = 0$ **Ecuación de la normal.**

Longitud de la tangente, normal, subtangente y subnormal

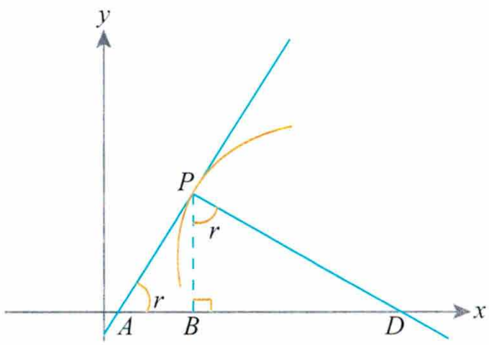
A la porción de la tangente que se encuentra entre el punto de tangencia y el eje de las x se denomina *longitud de la tangente*. Su proyección sobre el eje de las x es la longitud de la subtangente. Análogamente se define la longitud de la normal y la subnormal.

$\overline{AP}$ = Longitud de la tangente

$\overline{AB}$ = Longitud de la subtangente

$\overline{PD}$ = Longitud de la normal

$\overline{BD}$ = Longitud de la subnormal



Los ángulos r son iguales por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Fórmulas:

- En el triángulo APB, $\tan r = m = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$. Si despejamos tenemos:

$$\overline{AB} = \frac{\overline{PB}}{m} = \frac{y_1}{m} \qquad \textbf{(28)}$$

Ésta es la fórmula para obtener la longitud de la subtangente.

- En el triángulo BDP, $\tan r = m = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BP}}$. Cuando despejamos obtenemos:

$$\overline{BD} = m\left(\overline{BP}\right) = m\,y_1 \qquad \textbf{(29)}$$

Ésta es la fórmula para obtener la longitud de la subnormal.

Si la subtangente se extiende a la derecha del punto A de intersección de la tangente con el eje de las x, es positiva; si es a la izquierda es negativa. Observa la figura de la página anterior.

Si la subnormal se extiende a la derecha de B es positiva y si se extiende a la izquierda será negativa. Observa la figura de la página anterior.

Longitud de la tangente

La longitud de la tangente corresponde a la hipotenusa del triángulo APB; para calcularla aplicamos el teorema de Pitágoras con los valores de la subtangente $\overline{AB}$ y de $\overline{PB}$ en el triángulo citado.

Longitud de la normal

La longitud de la normal corresponde a la hipotenusa del triángulo BPD; para calcularla aplicamos el teorema de Pitágoras con los valores de la subnormal $\overline{BD}$ y el de $\overline{PB}$ en el triángulo citado.

Ejemplo:

1. Determina las ecuaciones de la tangente y de la normal, así como las longitudes de la subtangente y de la subnormal de la elipse $x^2 + 2y^2 = 18$ en el punto de coordenadas (4, 1).

Solución:

$x^2 + 2y^2 = 18$

Derivamos:

$$2x + 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{4y} = -\frac{x}{2y}$$

La pendiente en cualquier punto de la curva es $m = -\dfrac{x}{2y}$. En el punto (4, 1) es $m = -\dfrac{4}{2(1)} = -2$

Cálculo de la ecuación de la tangente

Sustituimos en:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

Con:

$m = -2$

$x_1 = 4$

$y_1 = 1$

$y - 1 = -2(x - 4)$

$y - 1 = -2x + 8$

$2x + y - 9 = 0$ **Ecuación de la tangente.**

Cálculo de la ecuación de la normal

Sustituimos en:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Con:

$m = -2$

$x_1 = 4$

$y_1 = 1$

$y - 1 = \frac{1}{x^{-2}}(x - 4)$

$2y - 2 = x - 4$

$x - 2y - 2 = 0$ **Ecuación de la normal.**

Cálculo de la longitud de la subtangente

Sustituimos en:

$\frac{y_1}{m}$ con $m = -2$ y $y_1 = 1$

$\frac{y_1}{m} = -\frac{1}{2}$ **Longitud subtangente.**

Cálculo de la subnormal

Sustituimos en:

my_1 con $m = -2$ y $y_1 = 1$

$my_1 = -2(1) = -2$ **Longitud subnormal.**

Pendientes de las rectas tangentes a una curva desde un punto externo a ella. Ecuaciones de las rectas tangentes

Ejemplos:

- **1.** Determina el valor de las pendientes de las rectas tangentes a la parábola $3y^2 - 3y + x - 4 = 0$ desde el punto $(1, -1)$ fuera de la parábola.

  Como la derivada de una curva evaluada en un punto cualquiera es igual a la pendiente m de la tangente en ese punto, derivamos la ecuación:

  $$f(x) = 3y^2 - 3y + x - 4 \qquad \textbf{(1)}$$

$$6y\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}+1=0$$

$$6y\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}=-1$$

$$\frac{dy}{dx}(6y-3)=-1$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6y-3} \qquad \textbf{(2)}$$

Obtenemos el valor de una de las variables con las coordenadas del punto $(1,-1)$ y la pendiente $m=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6y-3}$; sustituimos en la relación punto-pendiente:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+1=-\frac{1}{6y-3}(x-1)$$

$$6y^2+3y+x-4=0 \qquad \textbf{(3)}$$

Debemos formar un sistema de ecuaciones con **(1)** y **(3)** para obtener las coordenadas de los puntos de tangencia:

$$\begin{array}{rl}
3y^2-3y+x-4=0 & \textbf{(1)}\\
6y^2+3y+x-4=0 & \textbf{(3)}\\
\hline
6y^2-6y+2x-8=0 & \\
-6y^2-3y-x+4=0 & \\
\hline
-9y+x-4=0 &
\end{array}$$

Despejamos una de las variables, de preferencia la que resulte más cómoda para operar, en este caso sería x:

$$x=9y+4 \qquad \textbf{(4)}$$

Sustituimos en $f(x)$ con **(4)** para obtener el valor de la otra variable, en este caso y:

$$f(x)=3y^2-3y+x-4$$

$$f(9y+4)=3y^2-3y+9y+4-4=3y^2+6y=0$$

Obtenemos los valores de y:

$$y(3y+6)=0$$

$$y_1=0$$

$$y_2=-2$$

Ahora obtenemos los valores de x en **(4)**:

$x = 9y + 4$

Para $y_1 = 0$; $x_1 = 4$ de donde una de las coordenadas es (4, 0); para $y_2 = -2$; $x_2 = -14$ la del otro punto es (−14, −2).

Calculamos los valores de las pendientes en **(2)**:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6y-3}$$

$$m_1 = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$m_2 = -\frac{1}{-12-3} = -\frac{1}{-15} = \frac{1}{15}$$

2. Sigamos con el mismo ejemplo. En esta ocasión tenemos que obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $3y^2 - 3y + x - 4 = 0$ desde el punto (1, −1), que está fuera de la parábola.

Como ya calculamos los valores de las pendientes $m_1 = \frac{1}{3}, m_2 = \frac{1}{15}$ y las coordenadas del punto (1, −1) con la relación punto-pendiente, obtenemos la solución:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$3y + 3 = x - 1$$

$$3y - x + 4 = 0$$

$$y + 1 = \frac{1}{15}(x-1)$$

$$15y + 15 = x - 1$$

$$15y - x + 16 = 0$$

Observa cómo el punto de tangencia (4, 0) resuelve la ecuación de la tangente $3y - x + 4 = 0$ y el punto (−14, −2) la de la tangente $5y - x + 16 = 0$.

Ángulo de intersección de dos curvas

El ángulo formado por dos curvas en su punto de intersección es el que forman sus tangentes en ese punto.

Para calcular el ángulo formado por las tangentes debes seguir los siguientes pasos:

1. Obtener las coordenadas de los puntos de intersección.
2. Dado que pueden ser varios los puntos de intersección, debes determinar cuál de ellos utilizar.
3. Obtener la derivada de cada una de las curvas y determinar las pendientes m_1, m_2.
4. Para calcular el ángulo, debes aplicar la relación que estudiaste en tu curso de geometría analítica:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

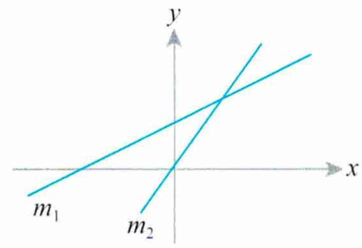
Para aplicar esta relación recuerda que es fundamental tener cuidado para determinar cuál es la pendiente m_1 y cuál es la m_2. Por esta razón, te presentamos las siguientes indicaciones:

A. m_2 es la pendiente de la recta que forma el ángulo mayor con el sentido positivo del eje de las x.

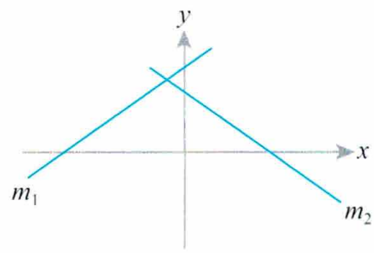
B. m_1 es la pendiente de la recta que forma el ángulo menor con el mismo eje x antes señalado.

C. Considerando que el valor de la función tangente es positivo o negativo, según corresponda a un ángulo agudo u obtuso, respectivamente, se tendrá presente que:

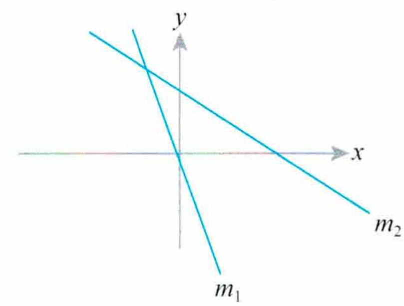
a) Si las dos pendientes son positivas, m_2 es la mayor y m_1 la menor.



b) Cuando una pendiente es positiva y la otra negativa, m_2 es la pendiente negativa y m_1 la positiva.



c) Cuando las dos pendientes son negativas m_2 es la mayor en valor absoluto.



Ejemplo:

1. Calcula el ángulo que forman las curvas $x^2 + y^2 = 16$ con $x - y = 4$.

Solución:

Obtenemos las coordenadas de los puntos de intersección:

$x^2 + y^2 = 16$ **(1)**

$x - y = 4$ **(2)**

Resolvemos por sustitución:

$-y = 4 - x$

$y = x - 4$

Sustituimos en **(1)**:

$x^2 + (x - 4)^2 = 16$

$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 16 = 0$

$2x^2 - 8x = 0$

$2x\,(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

Calculamos el valor de y en **(2)**:

Para $x_1 = 0$ en $x - y = 4$; $0 - y = 4$; $y_1 = -4$

Para $x_2 = 4$ en $x - y = 4$; $4 - y = 4$; $-y = 4 - 4$; $y_2 = 0$

Concluimos que las coordenadas de los puntos de intersección son $(0, -4)$, $(4, 0)$.

Obtenemos el ángulo formado por las curvas en el punto $(0, -4)$ mediante la derivación de ambas funciones:

$x^2 + y^2 = 16$	$x - y = 4$
$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$	$y = x - 4$
$2y\dfrac{dy}{dx} = -2x$	$y' = 1$
$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$	

Determinamos las pendientes en $(0, -4)$ para cada curva:

Para $x^2 + y^2 = 16$	Para $x - y = 4$
$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$	$y' = 1$
$m = -\dfrac{0}{-4} = 0$	$m = 1$

Señalamos cuál es m_1 y cuál es m_2:

$$m_1 = 0 \qquad\qquad m_2 = 1$$

Sustituimos en:

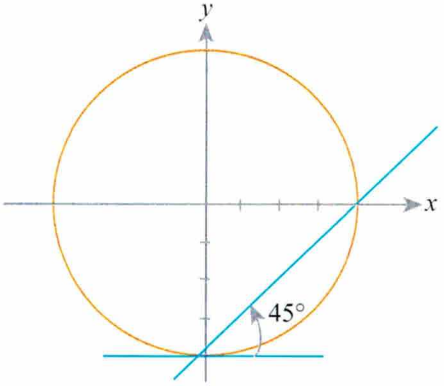
$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan\theta = \frac{1-0}{1+(0)(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = 45°$$

Expresamos el resultado gráficamente:



Ejercicios de repaso

I. Determina las pendientes de las siguientes curvas en el punto que se indica.

1. $y = x^3 - 4$ en $(1, -3)$ ***Sol.*** 3

2. $y = x^3 - 2x + 1$ en abscisa $\frac{1}{2}$ ***Sol.*** $-\frac{5}{4}$

3. $x^2 + y^2 = 13$ en $(2,\ 3)$ ***Sol.*** $-\frac{2}{3}$

4. $y = \sqrt{5 + 4x^2}$ en $x = 1$ ***Sol.*** $\frac{4}{3}$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$ en $x = 2$ ***Sol.*** $\frac{\sqrt{3}}{36}$

6. $x^2 - y^2 + 3x = 9$ en $(2,\ 1)$ ***Sol.*** $\frac{7}{2}$

7. $x^2 + 4y^2 = 3$ en $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***Sol.*** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

8. $y = \frac{\sqrt{9 + 3x}}{x}$ en $x = \frac{1}{2}$ ***Sol.*** $-\frac{39\sqrt{2}}{21}$

II. Determina las ecuaciones de la tangente y de la normal de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

1. $y = x^3 - 5x$ en $(2, -2)$ ***Sol.*** $7x - y - 16 = 0$ Ecuación tangente
   $x + 7y + 12 = 0$ Ecuación normal

2. $y=x^3+3x^2-5x+3$ en $(1, 2)$ **Sol.** $4x-y-2=0$ Ecuación tangente
$x+4y-9=0$ Ecuación normal

3. $xy=9$ en $(3, 3)$ **Sol.** $x+y-6=0$ Ecuación tangente
$x-y=0$ Ecuación normal

4. $x^2+y^2=10$ en $(1, -3)$ **Sol.** $x-3y-10=0$ Ecuación tangente
$3x+y=0$ Ecuación normal

5. $x^2-y^2-5y=1$ en $(1, 0)$ **Sol.** $2x-5y-2=0$ Ecuación tangente
$5x+2y-5=0$ Ecuación normal

6. $2xy-y^2=-3$ en $(1, 3)$ **Sol.** $3x-2y+3=0$ Ecuación tangente
$2x+3y-11=0$ Ecuación normal

7. $y=\dfrac{2x+1}{3-x}$ en $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ **Sol.** $7x-4y-1=0$ Ecuación tangente
$8x+14y-29=0$ Ecuación normal

III. Calcula el valor de las pendientes y de las rectas tangentes a las curvas que se indican.

1. Circunferencia $x^2+y^2+2x-8y+12=0$ desde el punto $(-2, 7)$ fuera de la curva.

Sol. $m=2;\ m=-\dfrac{1}{2};\ 2x-y+11=0;\ x+2y-12=0$

2. Parábola $y^2-3x-8y+10=0$ desde el punto $(-3, 3)$ fuera de la curva.

Sol. $m=\dfrac{3}{2};\ m=-\dfrac{1}{2};\ x+2y-3=0;\ 3x-2y+15=0$

IV. Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas que se indican desde los puntos fuera de ellas. Traza también las gráficas.

1. Parábola $y^2+3x-6y+9=0$ desde $(1, 4)$ **Sol.** $x+2y-9=0$
$3x-2y+5=0$

2. Parábola $y^2+8x=0$ desde $(-3, 1)$ **Sol.** $2x-3y-9=0$
$x+y+2=0$

V. Determina el ángulo que forman las curvas que se indican en cada punto.

1. $y^2 = 2x$ en $(2, 2)$ ***Sol.*** $18° \; 25'$
$y = x$

2. $x^2 + 3y^2 = 7$ en $(2, 1)$ ***Sol.*** $70° \; 20'$
$2x^2 - y^2 = 7$

3. $6x - 4y = 9$ en $\left(3, \frac{9}{4}\right)$ ***Sol.*** $0°$
$x^2 - 4y = 0$

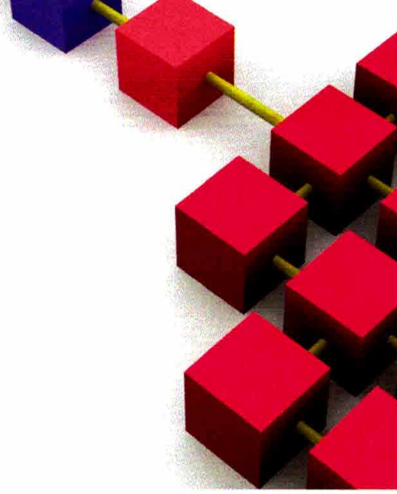
4. $y^2 - 4x = 0$ en $(1, 2)$ ***Sol.*** $96° \; 21'$
$5y + 2x^2 = 12$

5. $x^2 + 2y^2 = 3$ en $(1, 1)$ ***Sol.*** $81° \; 52'$
$3x^2 - y^2 = 2$

6. $4x^2 + 3y^2 = 4$ en $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ ***Sol.*** $175° \; 01'$
$8x^2 + 5y^2 = 7$

7. $2x^2 + 3y^2 + 8x = 3$ en $(-1, \sqrt{3})$ ***Sol.*** $128° \; 57'$
$10x^2 + 4y^2 + 12x = 10$

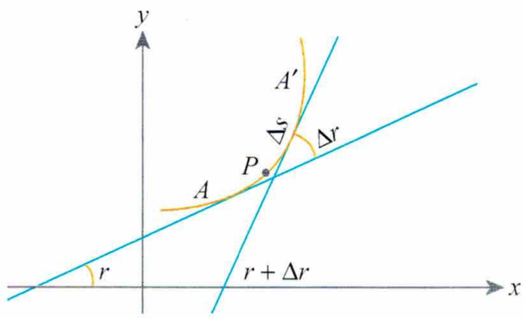
8. $x^2 + y^2 = 29$ en $(2, 5)$ ***Sol.*** $143° \; 48'$
$4x^2 + y^2 = 41$



Capítulo 14

Curvatura
Radio de curvatura
Coordenadas del centro de curvatura

Si en una curva tenemos un punto A, al moverse hasta A' describe el arco AA', cuya longitud es s y su incremento se expresa Δs. El valor de la tangente en A irá aumentando al desplazarse, lo cual da origen al **ángulo de contingencia**, cuyo valor es la variación de la inclinación de la tangente. Su incremento se expresa Δr.



Conceptos clave

- Ángulo de contingencia
- Curvatura
- Radio de curvatura
- Coordenadas del centro de curvatura

La **curvatura** en un punto P de una curva $y = f(x)$ se representa con la letra K y es igual a la variación de la inclinación r de la tangente en el punto P, entre la unidad de longitud de arco s:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds}$$

El ángulo Δr se mide en radianes y la longitud del arco en unidades de longitud, por lo que la unidad de curvatura en un punto P es un radián por unidad de longitud.

Fórmula para obtener la curvatura en coordenadas rectangulares

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds} = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

De donde:

$$K = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (30)$$

Aceptamos que el valor de K es positivo cuando el punto P está en un arco cóncavo hacia arriba y negativo cuando pertenece a un arco cóncavo hacia abajo. Sin embargo, por lo regular no se toma en cuenta el signo de K sino únicamente el valor absoluto de la curvatura.

Radio de curvatura (longitud del radio)

El radio de curvatura en un punto P de una curva se designa con la letra R y su valor es el recíproco de la curvatura en ese punto; de donde obtenemos:

$$R=\frac{1}{K}=\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''} \qquad \textbf{(31)}$$

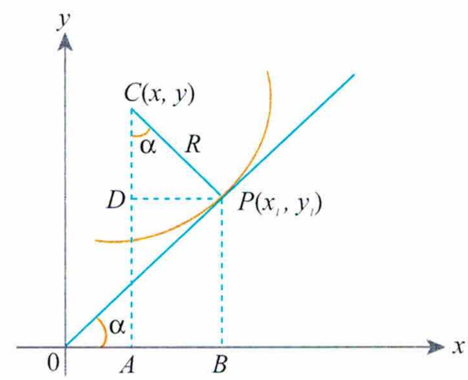
con $K \neq 0$

Coordenadas del centro de curvatura

Para calcular las coordenadas (x, y) del centro C de la curvatura correspondiente a un punto $P(x_1, y_1)$ de una curva $y=f(x)$ procedemos en la forma siguiente:

$$x=\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{DP}=x_1-R\operatorname{sen}\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=y_1+R\cos\alpha \qquad \textbf{(2)}$$



Como:

$$\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\tan\alpha=y'$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}$$

$$\csc\alpha=\sqrt{1+\cot^2\alpha} \qquad \text{Del formulario de trigonometría}$$

$$\cot^2\alpha=\frac{1}{\tan^2\alpha}$$

Obtenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(y')^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(y')^2+1}{(y')^2}}}=\frac{1}{\frac{1}{y'}\sqrt{(y')^2+1}}=\frac{y'}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

De donde:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{y'}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \textbf{(3)}$$

Como:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\,\alpha}$$ Del formulario de trigonometría

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

Obtenemos:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

De donde:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \textbf{(4)}$$

Sustituimos en **(1)** y **(2)** con **(3)** y **(4)**:

$$x=x_1-\frac{y'\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}}=x_1-\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}$$

$$y=y_1+\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}}=y_1+\frac{1+(y')^2}{y'}$$

De donde:

$$x=x_1-\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''} \qquad \textbf{(32)}$$

$$y=y_1+\frac{1+(y')^2}{y''} \qquad \textbf{(33)}$$

Ejemplos:

1. Determina la curvatura y la longitud del radio de curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en el punto (3, 6).

Solución:

Obtenemos y'

$$y' = 12x$$

$$\frac{d}{dx}y^2 = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}12x = 12$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 12$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{2y} = \frac{6}{y}$$

$$y' = \frac{6}{y}$$

Obtenemos y''

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{6}{y}\right) = \frac{y(0) - 6\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{6\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\begin{array}{l|l} u = 6 & v = y \\ u' = 0 & v' = \dfrac{dy}{dx} \end{array}$$

como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6}{y}$

$$y'' = -\frac{6\frac{6}{y}}{y^2} = -\frac{\frac{36}{y}}{y^2} = -\frac{36}{y^3}$$

$$y'' = -\frac{36}{y^3}$$

Sustituimos en **(30)**:

$$K = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{36}{y^3}}{\left[1 + \left(\frac{6}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{(1)}$$

Como es en el punto (3, 6) entonces $y = 6$.

Sustituimos en **(1)**:

$$K = \frac{-\frac{6^2}{6^3}}{\left[1 + \left(\frac{6}{6}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{1}{6}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{6}}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{2^3}} = -\frac{\frac{1}{6}}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{12\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$$

Cálculo del radio de curvatura:

$$R=\frac{1}{K}$$

$$K=-\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$$R=-\frac{24}{\sqrt{2}}=-\frac{24\sqrt{2}}{2}=-12\sqrt{2}$$

■ **2.** Determina las coordenadas del centro de la curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en el punto (3, 6), citada en el ejemplo anterior.

Solución:

Con $y'=\frac{6}{y}$

$$y''=-\frac{36}{y^3}$$

Sustituimos en **(29)**:

$$x=x_1-\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}=3-\frac{1(1+1^2)}{-\frac{1}{6}}=3+\frac{2}{\frac{1}{6}}=3+12=15$$

Sustituimos en **(30)**:

$$y=y_1+\frac{1+(y')^2}{y''}=6+\frac{1+1^2}{-\frac{1}{6}}=6-\frac{2}{\frac{1}{6}}=6-12=-6$$

De estas operaciones resultan las coordenadas del centro (15, –6).

Ejercicios de repaso

I. Calcula la curvatura y la longitud del radio de curvatura de las siguientes funciones:

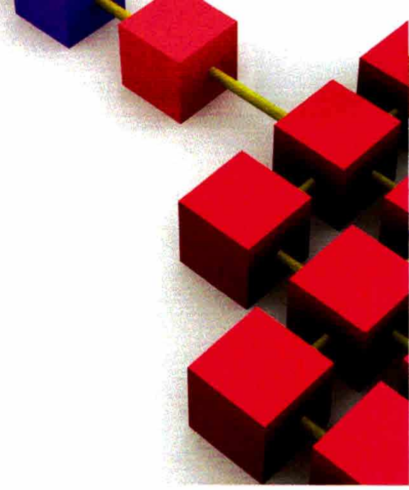
1. $2y=x^2$ en $(2,2)$ ***Sol.*** $\frac{1}{5\sqrt{5}}, 5\sqrt{5}$

2. $y=x^2$ en $(2,4)$ ***Sol.*** $\frac{2}{17\sqrt{17}}, \frac{17\sqrt{17}}{2}$

II. Calcula la curvatura, la longitud del radio de curvatura y las coordenadas del centro de curvatura de las siguientes funciones:

1. $xy = 9$ en $(3, 3)$ ***Sol.*** $\frac{1}{3\sqrt{2}}, 3\sqrt{2}, (6, 6)$

2. $y = x^3$ en $(1, 1)$ ***Sol.*** $\frac{3}{5\sqrt{10}}, \frac{5\sqrt{10}}{3}, \left(-4, \frac{8}{3}\right)$



Capítulo 15

Funciones crecientes y decrecientes Concavidad Puntos de inflexión

Funciones crecientes y decrecientes (utilizamos la primera derivada)

Conceptos clave

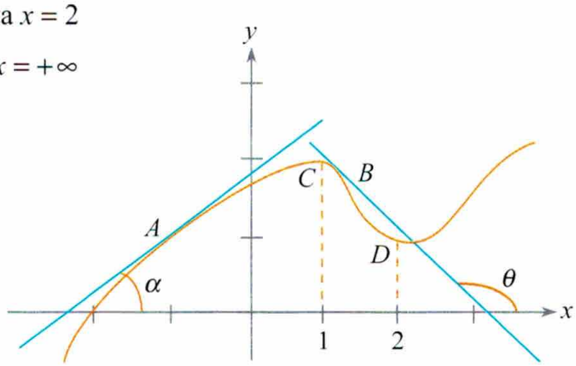
- Valores críticos
- Puntos críticos
- Función creciente
- Función decreciente
- Puntos de inflexión

Si representamos gráficamente una función, al moverse un punto de izquierda a derecha observamos con facilidad que unas veces es creciente y en otras decreciente.

La función es creciente desde $x = -\infty$ hasta $x = 1$

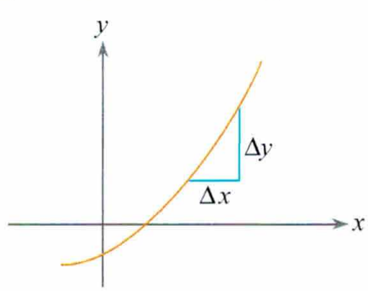
Decreciente desde $x = 1$ hasta $x = 2$

Creciente desde $x = 2$ hasta $x = +\infty$



Los valores de x, en este ejemplo $x = 1$, $x = 2$ en los cuales la gráfica de la función $f(x)$ es estacionaria, se le llaman *valores críticos* y a los puntos correspondientes, en este caso C y D, *puntos críticos*.

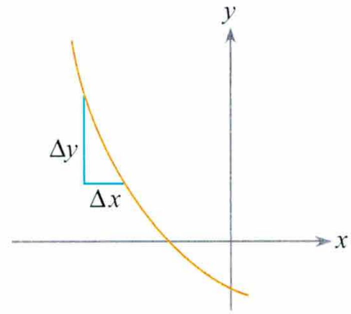
Una función es creciente cuando a medida que el valor de x aumenta, aumenta el de y; de donde el Δx y el Δy tendrán el mismo signo.



En la parte en que una función es decreciente, el valor de y disminuye cuando x aumenta; de donde el Δx y el Δy tendrán signos opuestos.

En la figura inicial, si consideramos un punto, por ejemplo A, donde la función es creciente, la tangente forma un ángulo agudo con el eje de las x; en consecuencia, la pendiente es positiva.

En el punto B, donde la función es decreciente, la tangente forma un ángulo obtuso con el eje x, por lo que la pendiente es negativa.



Conclusión:

Una función es creciente, en un punto dado, si el valor de la primera derivada es positivo; y es decreciente si el valor de la misma primera derivada es negativo en ese punto.

Ejemplos:

1. Determina si la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$ es creciente o decreciente en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -3$. Calcula el valor de las ordenadas correspondientes.

Solución:

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$$

$$y' = 6x^2 - 6x + 12$$

Para $x = 0$:

$f'(0) = 6(0)^2 - 6(0) + 12 = 12$ es creciente

Para $x = -3$

$f'(-3) = 6(-3)^2 - 6(-3) + 12 = 84$ es creciente.

Calculamos las ordenadas en la función original:

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$$

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 12(0) - 1 = -1$$

$$f(-3) = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 + 12(-3) - 1 = -118$$

2. Determina los intervalos en los cuales la función $y = x^3 - 3x + 2$ es creciente y aquellos en que es decreciente.

$$y = x^3 - 3x + 2$$

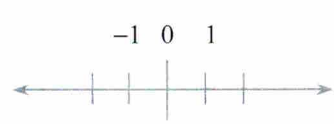
$$y' = 3x^2 - 3$$

Igualar a cero $f'(x)$ para obtener las raíces x_1, x_2:

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



Construimos una tabla para $f'(x) = 3x^2 - 3$ y así determinar los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

Operaciones para llenar la tabla:

$f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9$ $\quad$ $9 > 0$ Creciente.

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$ $\quad$ 0 ni creciente ni decreciente.

$f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$ $\quad$ $-3 < 0$ decreciente.

$f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$ $\quad$ 0 ni creciente ni decreciente.

$f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9$ $\quad$ $9 > 0$ creciente.

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusión:

La tabla muestra que al ir x de izquierda a derecha:

$f(x)$ es creciente para $x < -1$

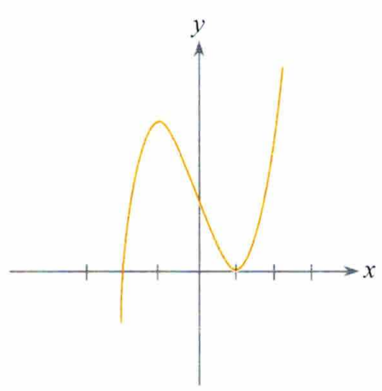
$f(x)$ es decreciente para $-1 < x < 1$

$f(x)$ es creciente para $x > 1$

Tabulamos $f(x)$ para obtener la gráfica. Observa que tomamos los mismos valores de x con que tabulamos $f'(x)$.

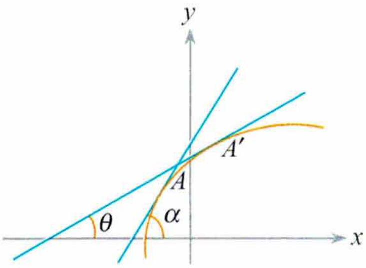
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	4	2	0	4

Trazamos la gráfica.



Concavidad (utilizamos la segunda derivada)

Observemos las figuras que a continuación se indican; si un punto $A(x, y)$ describe una curva, la tangente en A varía en la forma siguiente:



La pendiente de la tangente aumenta cuando el punto A describe el arco, de donde la primera derivada es una función creciente de x; por lo tanto, su derivada (la segunda derivada) es positiva.

Cuando la tangente queda por debajo de la curva, el arco es cóncavo hacia arriba.

La pendiente de la tangente disminuye cuando el punto A describe el arco, de donde la primera derivada es una función decreciente de x; por lo tanto, su derivada (la segunda derivada) es negativa.

Cuando la tangente queda por arriba de la curva, el arco es cóncavo hacia abajo.

Cálculo del sentido de la concavidad de una función

Procedemos de la forma siguiente:

A. Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

B. El resultado de la segunda derivada lo igualamos a cero y obtenemos las raíces (puntos críticos).

C. Analizamos en $f''(x)$. Sea la raíz x_1 si para un valor de x, tal que $x < x_1$ tenemos que el resultado es negativo. La curva es cóncava hacia abajo; por costumbre se expresa $\overset{\frown}{-}$. Si es positivo, la curva es cóncava hacia arriba: $\underset{\smile}{+}$.

D. En forma semejante analizamos las otras raíces x_2, x_3, ... obtenidas.

Conclusión:

$f''(x) > 0$ Condición para que una curva sea cóncava hacia arriba.

$f''(x) < 0$ Condición para que una curva sea cóncava hacia abajo.

Algunas curvas son cóncavas hacia arriba o hacia abajo en todo su recorrido. Otras, en algunos intervalos.

A. Cálculo del sentido de la concavidad de una función en un punto cualquiera.

Sustituimos en $f''(x)$ el valor de x en que se quiere saber el sentido de la concavidad. Si el resultado es negativo, la curva es $\overset{\frown}{-}$. Si el resultado es positivo la curva es $\underset{\smile}{+}$.

Ejemplo:

■ **1.** Señala si la curva $y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo en los puntos $x = -2$, $x = 1$.

$$y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 4$$

Sustituimos los valores de $x = -2$ y de $x = 1$ en $f''(x)$:

$f''(-2) = 12(-2)^2 - 24(-2) + 4 = 100$ $100 > 0$ de donde es $\underset{\smile}{+}$

$f''(1) = 12(1)^2 - 24(1) + 4 = -8$ $-8 < 0$ de donde es $\overset{\frown}{-}$

B. Cálculo del sentido de la concavidad de una función en diferentes intervalos (a la izquierda y derecha de sus puntos críticos).

Ejemplo:

1. Calcula en qué intervalos la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ es $\underset{\smile}{+}$ o $\overset{\frown}{-}$.

$y = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$

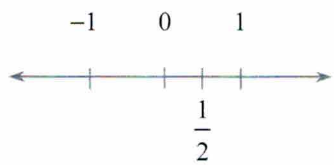
$f''(x) = 12x - 6$

Igualamos a cero $f''(x)$ y obtenemos las raíces x_1, x_2, ... en este caso, únicamente x_1:

$12x - 6 = 0$

$12x = 6$

$x_1 = \frac{1}{2}$



Analizamos para un valor menor que $x_1 = \frac{1}{2}$; por ejemplo, 0:

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(0) = 12(0) - 6 = -6$

$-6 < 0$ es $\overset{\frown}{-}$

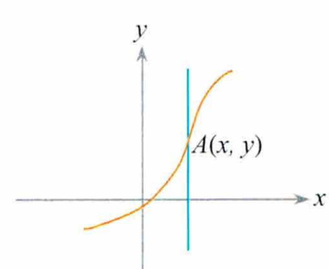
Ahora tomamos un valor mayor que $\frac{1}{2}$; por ejemplo, 1:

$f''(1) = 12(1) - 6 = 6$ $\qquad$ $6 > 0$ es $\underset{\smile}{+}$

Conclusión:

En el punto crítico $x = \frac{1}{2}$ hay un cambio en el sentido de la concavidad, ya que cualquier valor a la izquierda de él, el valor de $f''(x)$ es negativa; por lo tanto la curva es $\overset{\frown}{-}$. A la derecha del mismo punto $f''(x)$ es positiva y la curva es $\underset{\smile}{+}$.

Puntos de inflexión (utilizamos la segunda o la tercera derivadas)



En la figura observamos que si en un punto $A(x, y)$ de la curva cambia el sentido de la concavidad, entonces la curva tiene un punto de inflexión.

Existen dos procedimientos diferentes para determinar los puntos de inflexión de una curva:

A. El criterio de la segunda derivada.

B. El criterio de la tercera derivada.

Criterio de la segunda derivada para obtener los puntos de inflexión

Si la concavidad de una curva cambia de sentido, entonces la segunda derivada cambia de signo y en consecuencia, es igual a cero en el punto de inflexión.

De lo expuesto deducimos el criterio de la segunda derivada para calcular los puntos de inflexión de una función $y = f(x)$:

A. Calculamos la primera y segunda derivadas de la función.

B. El resultado de la segunda derivada se iguala a cero y obtenemos las raíces.

C. Analizamos en $f''(x)$.

Sea la raíz x_1, si para un valor de x tal que $x < x_1$ y para otro valor de $x > x_1$ cambia de signo al sustituir los valores en $f''(x)$ entonces hay inflexión.

D. En forma semejante analizamos las otras raíces x_2, x_3, ... obtenidas.

E. Para obtener las coordenadas del punto de inflexión que corresponde al valor de $x = x_1$ calculamos el valor de la ordenada en la función original.

Ejemplo:

1. Calcula los puntos de inflexión de la función:

$$y = x^4 + 2x^3 - 7$$

$$y' = 4x^3 + 6x^2$$

$$y'' = 12x^2 + 12x$$

Igualamos a cero $f''(x)$ y obtenemos las raíces x_1 y x_2:

$$12x^2 + 12x = 0$$

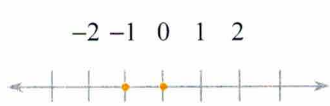
$$12x(x+1) = 0$$

$$12x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x_2 = -1$$



Tenemos que los puntos críticos son $x = 0$ y $x = -1$.

Analizamos (en la misma segunda derivada): Para $x_1 = 0$ tomamos valores próximos a cero por la izquierda y por la derecha.

Tomamos un valor menor que 0; por ejemplo, $-\frac{1}{2}$ y calculamos:

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right)=12\left(-\frac{1}{2}\right)^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)=3-6=-3 \qquad -3<0$$

Tomamos un valor mayor que 0; por ejemplo, 1 y calculamos:

$$f''(1)=12(1)^2+12(1)=12+12=24 \qquad 24>0$$

Dado que la segunda derivada cambia de signo, aceptamos que hay un punto de inflexión en $x=0$.

Continuamos el análisis, ahora para $x_2=-1$.

Tomamos un valor menor que –1; por ejemplo, –2 y calculamos:

$$f''(-2)=12(-2)^2+12(-2)=48-24=24 \qquad 24>0$$

Tomamos un valor mayor que –1; por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y calculamos:

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right)=12\left(-\frac{1}{3}\right)^2+12\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{9}-4=\frac{12-36}{9}=-\frac{24}{9} \qquad -\frac{24}{9}<0$$

Dado que la segunda derivada cambia de signo, aceptamos que hay un punto de inflexión en $x_2=-1$.

Calculamos las ordenadas de los puntos de inflexión en la función original con los valores de x_1 y de x_2.

$$f(x)=x^4+2x^3-7$$

Para $x_1=0$

$$f(0)=0^4+2(0)^3-7=-7$$

Para $x_2=-1$

$$f(-1)=(-1)^4+2(-1)^3-7=1-2-7=1-9=-8$$

Las coordenadas de los puntos de inflexión son (0, –7) y (–1, –8).

Criterios de la tercera derivada para obtener los puntos de inflexión

Procedemos en la forma siguiente:

A. Calculamos la primera, segunda y tercera derivadas.

B. El resultado de la segunda derivada lo igualamos a cero y obtenemos las raíces.

C. El valor de las raíces de la segunda derivada se sustituyen en la tercera derivada; en la raíz que no anula a la tercera derivada hay punto de inflexión.

D. En la función original calculamos los valores de las ordenadas, según se trate de una o de varias.

Ejemplo:

■ **1.** Calcula los puntos de inflexión de la función $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + x - 1$

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 1$$

$$y'' = 36x^2 - 24x - 12$$

$$y''' = 72x - 24$$

Igualamos a cero $f'(x)$ obtenemos las raíces x_1 y x_2:

$$36x^2 - 24x - 12 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Calculamos las raíces:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$9x^2 - 2(3x) - 3 = (3x - 3)(3x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

Desarrollamos para determinar si se anula y''':

con $x_1 = 1$:

$$y''' = 72x - 24$$

$$f'''(1) = 72(1) - 24 = 72 - 24 = 48$$

No se anula la tercera derivada y por consiguiente hay punto de inflexión en $x_1 = 1$.

Ahora, análogamente con $x_2 = -\frac{1}{3}$

$$f'''\left(-\frac{1}{3}\right) = 72\left(-\frac{1}{3}\right) - 24 = -24 - 24 = -48$$

No se anula, hay punto de inflexión en $x_2 = -\frac{1}{3}$

Calculamos las ordenadas en la función original:

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + x - 1$$

$$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 6(1)^2 + 1 - 1 = 3 - 4 - 6 = -7$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^4 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 1$$

$$=3\left(\frac{1}{81}\right)+4\left(\frac{1}{27}\right)-6\left(\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3}-1=\frac{1}{27}+\frac{4}{27}-\frac{6}{9}-\frac{1}{3}-1$$

$$=\frac{1+4-18-9-27}{27}=\frac{5-54}{27}=-\frac{49}{27}$$

Las coordenadas de los puntos de inflexión son $(1,-7)$ y $\left(-\frac{1}{3},-\frac{49}{27}\right)$

Ejercicios de repaso

I. Determina si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes en los puntos de abscisa que se dan en cada caso. Calcula además las ordenadas correspondientes.

1. $y=6x^3-4x^2-5x+1$ en $x=-\frac{1}{3}, x=\frac{1}{2}, x=2$

Sol. Decreciente, decreciente, creciente, $2,-\frac{7}{4},23$

2. $y=2x^3-6x+1$ en $x=1, x=2, x=0$

Sol. Ni crece ni decrece, creciente, decreciente, -3, 5, 1

3. $y=-\frac{x^3}{2}$ en $x=-2, x=0, x=1$

Sol. Decreciente, ni crece ni decrece, decreciente, 4, 0, $-\frac{1}{2}$

II. Calcula el sentido de la concavidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

1. $f(x)=x^3+2x^2-4x-2$ en $x=-1, x=0$

Sol. Cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba.

2. $f(x)=x^3-x^2+3$ en $x=-\frac{3}{5}, x=0, x=2$

Sol. Cóncava hacia abajo, cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba.

3. $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ en $x=-1$ en $x=0$

Sol. Cóncava hacia abajo, cóncava hacia abajo.

III. Calcula en qué intervalos las curvas siguientes son $\underline{\cup}$ o $\underline{\cap}$.

1. $f(x)=2x^3-6x^2+3$

Sol. Cóncava hacia abajo a la izquierda de $x=1$

Cóncava hacia arriba a la derecha de $x=1$

2. $y = 3 + 5x - x^5$ **Sol.** Cóncava hacia arriba a la izquierda de $x = 0$

Cóncava hacia abajo a la derecha de $x = 0$

3. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x - \dfrac{1}{3}$ **Sol.** Cóncava hacia abajo a la izquierda de $x = 1$

Cóncava hacia arriba a la derecha de $x = 1$

IV. Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

1. $y = (-x + 2)^3$ **Sol.** $(2, 0)$

2. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 5$ **Sol.** $(1, -2)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{122}{27}\right)$

V. Determina los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 1$ **Sol.** Coordenadas: $(-2, 1)\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{31}{16}\right)$

Cóncava hacia arriba a la izquierda de $x = -2$

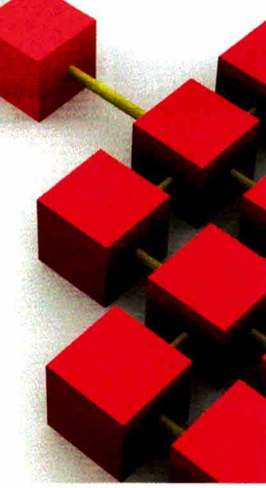
Cóncava hacia abajo a la derecha de $x = -2$

Cóncava hacia abajo a la izquierda $x = -\dfrac{1}{2}$

Cóncava hacia arriba a la derecha de $x = -\dfrac{1}{2}$

2. $y = x^2$ **Sol.** No hay, cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

3. $y = 5 - 2x - x^2$ **Sol.** No hay, cóncava hacia abajo en todos sus puntos.



Capítulo 16

Máximos y mínimos relativos Gráficas

Máximos y mínimos relativos (utilizamos la primera y segunda derivadas)

Un máximo y un mínimo no son necesariamente el mayor y el menor valor de la función, por eso se les llama máximo y mínimo relativos; no deben confundirse con los puntos máximo y mínimo de una curva, que son aquellos cuya ordenada es la mayor o la menor de la gráfica completa de toda una función.

Los valores de x donde hay un máximo o mínimo relativo, o un máximo o mínimo de la función se les llama valores críticos; a los puntos que les corresponden en la gráfica reciben el nombre de puntos críticos, concepto que ya aplicamos en el tema de las funciones crecientes y decrecientes.

Conceptos clave

Puntos críticos
Puntos máximos
Puntos mínimos
Puntos de inflexión

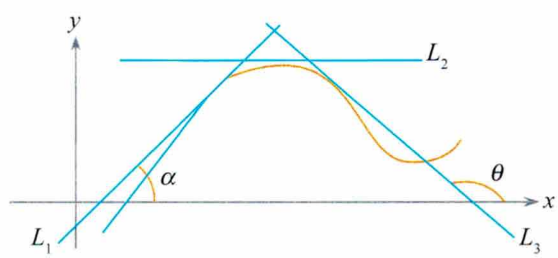
Existen dos procedimientos para obtener los máximos y los mínimos relativos:

A. El criterio de la primera derivada.

B. El criterio de la segunda derivada.

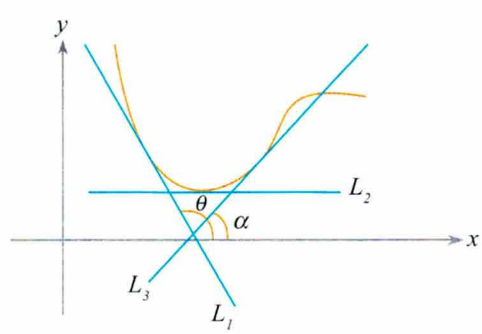
Criterio de la primera derivada para obtener los máximos y mínimos relativos de una función

Observemos las figuras siguientes:



- La pendiente de la recta L_1 es positiva.
- La pendiente de la recta L_2 es cero.
- La pendiente de la recta L_3 es negativa.

En un máximo relativo, la función pasa de creciente a decreciente, es decir, el valor de la derivada pasa de positiva a negativa.



- La pendiente de la recta L_1 es negativa.
- La pendiente de la recta L_2 es cero.
- La pendiente de la recta L_3 es positiva.

En un mínimo relativo, la función pasa de decreciente a creciente; es decir, el valor de la derivada pasa de negativa a positiva.

De lo expuesto anteriormente deducimos el criterio de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$:

A. Calculamos la primera derivada de la función.

B. El resultado lo igualamos a cero y resolvemos la ecuación. Las raíces $x_1, x_2, x_3, \ldots$ que obtenemos son los valores críticos para los cuales la función puede tener un máximo, un mínimo o bien, no contar con ninguno de los dos.

C. Analizamos en $f'(x)$.

Sea la raíz x_1 si para un valor $x < x_1$ tenemos que $f'(x) > 0$ y para un valor de $x > x_1$ es $f'(x) < 0$ la función tiene un máximo.

Si la función pasa de negativa a positiva, entonces tiene un mínimo.

En forma semejante, analizamos las otras raíces $x_2, x_3, \ldots$ obtenidas.

D. Si la derivada pasa de positiva a positiva, o de negativa a negativa, no podemos señalar en ese punto crítico un máximo o un mínimo.

E. Para obtener las coordenadas del máximo o del mínimo relativos, que corresponde al valor de $x = x_1$, de $x = x_2, \ldots$ calculamos el valor de la ordenada en la función original.

Ejemplo:

■ **1.** Calcula los máximos y mínimos relativos de $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$

Derivamos $y' = 3x^2 - 2x - 5$ e igualamos a cero $f'(x)$. Obtenemos las raíces x_1 y x_2:

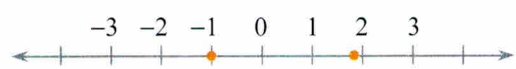
$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$9x^2 - 2(3x) - 15 = \frac{(3x-5)(3x+3)}{(1)(3)} = (3x-5)(x+1)$$

$$(3x-5)(x+1) = 0$$

$$x_1 = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = -1$$



Puntos críticos: $x = -1$ y $x = \dfrac{5}{3}$

Analizamos para un valor menor que $x = \dfrac{5}{3}$, pero mayor que -1; por ejemplo, 1:

$$y' = 3x^2 - 2x - 5$$

$f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 5 = 3 - 2 - 5 = -4$ $\qquad -4 < 0$

Ahora tomamos un valor mayor que $\dfrac{5}{3}$; por ejemplo, 2:

$f'(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 5 = 12 - 4 - 5 = 3$ $\qquad 3 > 0$

Como la derivada pasa de negativa a positiva, hay un mínimo cuando $x = \dfrac{5}{3}$. A continuación, calculamos el valor de la ordenada en la función original con $x = \dfrac{5}{3}$:

$$y = x^3 - x^2 - 5x + 7$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{3}\right) + 7 = \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{25}{3} + 7$$

$$= \frac{125 - 75 - 225 + 189}{27} = \frac{314 - 300}{27} = \frac{14}{27}$$

$$y = \frac{14}{27}$$

Señalamos que en el punto de coordenadas $\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{27}\right)$ hay un mínimo de la función $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$.

Continuamos con el análisis, ahora para $x_2 = -1$.

Tomamos un valor menor que $x_2 = -1$; por ejemplo, -2:

$$y' = 3x^2 - 2x - 5$$

$$f'(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) - 5 = 3(4) + 4 - 5 = 12 + 4 - 5 = 11 \qquad 11 > 0$$

Ahora tomamos un valor mayor que -1 pero menor que $\frac{5}{3}$; por ejemplo, 1:

$$f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 5 = 3 - 2 - 5 = 3 - 7 = -4 \qquad -4 < 0$$

Como la derivada pasa de positiva a negativa, hay un máximo cuando $x = -1$.

A continuación calculamos el valor de la ordenada en la función original con $x = -1$:

$$y = x^3 - x^2 - 5x + 7$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) + 7 = -1 - 1 + 5 + 7 = 10$$

$$y = 10$$

Señalamos que en el punto de coordenadas $(-1, 10)$ hay un máximo en la función $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$

Ejercicios de repaso

Calcula los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones, aplicando el criterio de la primera derivada:

1. $y = x^2 + 4x + 2$ — ***Sol.*** Mínimo en $(-2, -2)$

2. $y = -3x^2$ — ***Sol.*** Máximo en $(0, 0)$

3. $y = -x^2 + 3x + 1$ — ***Sol.*** Máximo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$

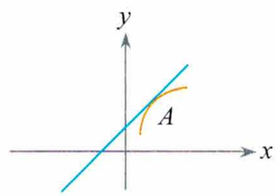
4. $y = x^4 + 2x^3 - 7$ **Sol.** Mínimo en $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{139}{16}\right)$

5. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ **Sol.** Mínimo en $(1, 2)$, mínimo en $(-1, 2)$

6. $y = \frac{2x}{x^2+1}$ **Sol.** Máximo en $(1, 1)$, mínimo en $(-1, -1)$

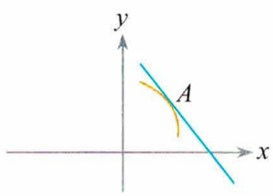
Criterio de la segunda derivada para obtener los máximos y mínimos relativos de una función

Observa las figuras que se ubican al margen de la página:



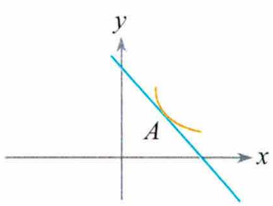
Una curva puede representar, respecto a su concavidad en un punto, los aspectos siguientes:

En este caso, en un entorno (en una proximidad) del punto A, la curva se conserva por debajo de la recta tangente; entonces decimos que la curva dirige su concavidad hacia abajo.



En un máximo relativo, la concavidad es hacia abajo, la derivada decrece y en consecuencia el valor de la segunda derivada es negativo.

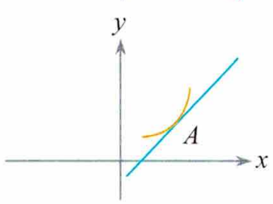
En un entorno del punto A la curva se conserva por encima de la recta tangente; decimos que la curva dirige su concavidad hacia arriba.



En un mínimo relativo, la concavidad es hacia arriba, la derivada crece y en consecuencia la segunda derivada es positiva.

De lo expuesto anteriormente, deducimos el criterio de la segunda derivada para calcular los máximos y los mínimos relativos de una función $y = f(x)$:

A. Calculamos la primera y segunda derivadas de la función.



B. El resultado de la primera derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación para obtener las raíces.

C. Las raíces obtenidas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se sustituyen en $f''(x)$.

D. Si hecha la sustitución el valor de la segunda derivada es negativo, hay un máximo; si el valor es positivo, entonces hay un mínimo.

E. Para obtener las coordenadas del máximo o del mínimo relativos, que corresponde a $x_1, x_2, x_3, \ldots$ calculamos el valor de la ordenada en la función original.

F. Si el valor de la segunda derivada es cero, no podemos determinar si habrá máximo o mínimo, incluso es probable que no haya ni un máximo ni un mínimo.

Ejemplo:

- **1.** Calcula los máximos y mínimos relativos. Aplica el criterio de la segunda derivada de la función:

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$$

$$y' = 6x^2 - 6x - 12$$

$$y'' = 12x - 6$$

Igualamos a cero la primera derivada y obtenemos las raíces:

$$6x^2-6x-12=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x_1=2$$
$$x_2=-1$$

Sustituimos en la segunda derivada:

$y''=12x-6$

$f''(2)=12(2)-6=24-6=18 \qquad 18>0$

Hay mínimo en $x=2$

$f''(-1)=12(-1)-6=-12-6=-18 \qquad -18<0$

Hay máximo en $x=-1$

Calculamos las ordenadas:

Para $x_1=2$:

$$y=2x^3-3x^2-12x+2$$
$$f(2)=2(2)^3-3(2)^2-12(2)+2=16-12-24+2$$
$$=-36+18=-18$$

Para $x_2=-1$:

$f(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)+2=-2-3+12+2=9$

Conclusión:

Para obtener los máximos y mínimos relativos es más fácil aplicar el criterio de la segunda derivada; pero a veces no es posible aplicarlo porque resulta complicado obtener la segunda derivada o ésta es igual a cero, entonces se aplicará el de la primera derivada.

¡Aplícate!

I. Calcula los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones. Aplica el criterio de la segunda derivada:

1. $y=x^3-4x+5$ ***Sol.*** Mínimo en $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{45-16\sqrt{3}}{9}\right)$

Máximo en $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{45+16\sqrt{3}}{9}\right)$

2. $y=x^3+x^2-5$ ***Sol.*** Mínimo en $(0,-5)$

Máximo en $\left(-\frac{2}{3},-\frac{131}{27}\right)$

3. $y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+8$

Sol. Mínimo en $(2,-2)$

Máximo en $\left(-1,\frac{23}{2}\right)$

4. $y=x^3-9x+2$

Sol. Mínimo en $\left(\sqrt{3},-6\sqrt{3}+2\right)$

Máximo en $\left(-\sqrt{3},6\sqrt{3}+2\right)$

5. $y=\frac{x^4+1}{x^2}$

Sol. Mínimo en $(1,2)$

Máximo en $(-1,2)$

II. Determina los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

1. $y=2x^3-6x+3$

Sol. Mínimo en $(1,-1)$

Máximo en $(-1,7)$

2. $y=x^3-6x^2+8$

Sol. Máximo en $(0,8)$

Mínimo en $(4,-24)$

3. $y=-2x^3+3x^2+12x+15$

Sol. Máximo en $(2,35)$

Mínimo en $(-1,8)$

4. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+1$

Sol. Mínimo en $\left(2,-\frac{7}{3}\right)$

Máximo en $\left(-1,\frac{13}{6}\right)$

Gráficas

Para trazar la gráfica de una función $y=f(x)$ debes seguir los siguientes pasos:

A. Determina el valor de las ordenadas cuando $x=0$ y los de las abscisas cuando $y=0$. En algunos casos se obtienen con facilidad, pero el no obtenerlas no impide trazar la gráfica.

B. Calcula las coordenadas de los máximos y mínimos relativos, y las de los puntos de inflexión. Si quieres mayor precisión, tabulamos asignando valores antes del máximo, entre el máximo y el mínimo, y después del mínimo (usamos división abreviada).

C. En algunos casos es necesario determinar previamente si la función es continua y se calculan las posibles simetrías respecto al origen y a los ejes de coordenadas.

Ejercicios de repaso

I. Calcula los intervalos en que cada una de las funciones siguientes es creciente o decreciente. Traza las gráficas.

1. $f(x)=x^3+2x^2-4$ — ***Sol.*** Creciente $x<-\frac{4}{3}$, creciente $x>0$

Decreciente $-\frac{4}{3}<x<0$

2. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ — ***Sol.*** Creciente $x<1$, creciente $x>2$

Decreciente $1<x<2$

3. $f(x)=x^2-4x-1$ — ***Sol.*** Decreciente $x<2$ creciente $x>2$

4. $f(x)=x^4-4x^2+4$ — ***Sol.*** Decreciente $x<-\sqrt{2}$, decrece $0<x<\sqrt{2}$

Creciente $-\sqrt{2}<x<0$, crece $x>\sqrt{2}$

II. Calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de las funciones siguientes:

1. $f(x)=\frac{x^3}{27}-x$ — ***Sol.*** Máximo (–3, 2), punto inflexión (0, 0) y mínimo (3, –2)

2. $f(x)=\frac{1}{1+3x^2}$ — ***Sol.*** Máximo (0, 1), puntos inflexión $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$

3. $f(x)=2x^3-24x-1$ — ***Sol.*** Máximo (–2, 31), mínimo (2, –33) y punto inflexión (0, –1)

4. $f(x)=-x^3+3x^2+9x+1$ — ***Sol.*** Máximo (3, 28), mínimo (–1, –4) y punto inflexión (1, 12)

5. $f(x)=x^3+3x-2$ — ***Sol.*** No hay valores críticos, como $f'(x)>0$ para todo valor de x, $f(x)$ es función creciente en todo punto, pero si hay un punto de inflexión en (0, –2)

6. $f(x)=(x-1)^3$ — ***Sol.*** No hay máximo ni mínimo, punto inflexión (1, 0)

III. Traza la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x)=x^3+x^2-x-1$ — ***Sol.*** Continua

Intersección eje y (0, –1)

Intersección eje x (1, 0) y (–1, 0)

Máximo (–1, 0)

Mínimo $\left(\frac{1}{3},-\frac{32}{27}\right)$

Punto inflexión $\left(-\frac{1}{3},-\frac{16}{27}\right)$

2. $f(x)=x^2-2x+5$

Sol. Continua

Intersección eje y $(0, 5)$

Intersección eje x, no hay,

Mínimo $(1, 4)$

No hay puntos de inflexión.

3. $f(x)=x^4-2x^2+1$

Sol. Continua

Intersección en el eje y $(0, 1)$

Intersecciones eje x: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$

Máximo $(0, 1)$

Mínimos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$

Puntos de inflexión $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{4}{9}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{4}{9}\right)$

4. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{2}$

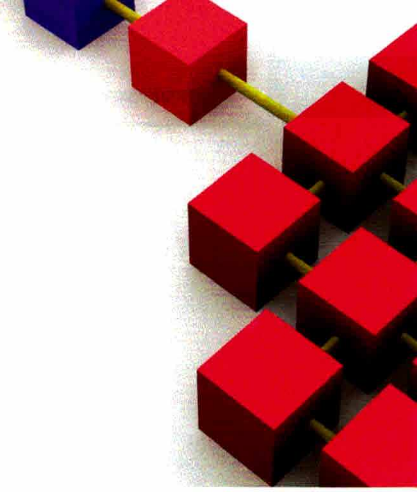
Sol. Continua

Mínimo en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Intersección al eje y en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

No hay intersección eje x

No hay puntos de inflexión.



Capítulo 17

Problemas de máximos y mínimos

Resolución de problemas

Si en un problema encontramos expresiones como *más grande*, *menor costo*, *menor tiempo*, *más voltaje*, *la mayor productividad*, *menor esfuerzo*, *más resistente*, entre otras más, podemos traducirlas a un lenguaje matemático en términos de máximos y mínimos.

Se presentan dos casos:

A. En el primero, el problema incluye una función específica que permite su solución.

B. En el segundo caso, la función se desconoce y es necesario obtenerla utilizando fórmulas conocidas y los datos del problema, o únicamente con los datos disponibles.

C. En ambos casos, para obtener la solución se recomienda:

a) Trazar una gráfica (de ser posible).

b) Asignar una literal a cada una de las cantidades que se citan en el problema.

c) Seleccionar la cantidad a obtener su máximo o su mínimo y expresarla en función de las otras cantidades.

d) Si resulta una función de *una sola variable* aplicamos los procedimientos ya estudiados para obtener los máximos y los mínimos.

Si es de *varias variables*, con la información del problema se eliminan las otras cantidades para obtener una función de una sola variable.

El enunciado incluye la función que resuelve el problema

Problema 1

Un móvil inicia su movimiento, acelera y hace un recorrido de 15 minutos según la ecuación $s = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$. Si se mide el tiempo en segundos y el espacio en metros, calcula:

- La distancia que recorre el móvil.
- La velocidad máxima que alcanza.
- La distancia que recorre cuando su velocidad es máxima.

Solución:

a. Distancia que recorre en 15 minutos

$$s = f(t) = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$$

$$f(15) = 144(15)^2 - \frac{15^4}{4} + 100 = 19844 \text{ m}$$

b. Velocidad y aceleración

Velocidad en un instante cualquiera:

$$s = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(288t - \frac{4t^3}{4}\right) \text{m/min} = (288t - t^3) \text{ m/min}$$

Aceleración en un instante cualquiera:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 288 - 3t^2$$

Para que la velocidad aumente y llegue a un máximo, debe haber aceleración (positiva) en el momento en que la aceleración es cero. A partir de ahí, pueden suceder dos cosas: o el móvil mantiene su velocidad o bien, empieza a disminuir; por esta razón el punto crítico es cuando $a = 0$.

Tiempo crítico cuando $a = 0$:

$$0 = 288 - 3t^2$$

$$288 - 3t^2 = 0$$

$$-3t^2 = -288$$

$$t^2 = \frac{288}{3} = 96$$

$$t = \sqrt{96} = \pm 9.8 \text{ min.}$$

Tomamos el valor positivo $t = 9.8$.

c. Velocidad máxima que alcanza el móvil

Analizamos en la aceleración:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 288 - 3t^2 \quad \text{con } t = 9.8.$$

Para un valor un poco menor, sea $t = 9$:

$$a = f''(t) = 288 - 3t^2$$

$$a = f''(9) = 288 - 243 = 45 \qquad \text{Signo } (+)$$

Para un valor un poco mayor, sea $t = 10$:

$a = f''(10) = 288 - 300 = -12$ Signo (–)

Como pasa de positivo a negativo concluimos que hay un máximo en $t = 9.8$

Velocidad máxima en $t = 9.8$:

$v = 288t - t^3$

$v(9.8) = 288(9.8) - (9.8)^3 = 2822.4 - 941.19 = 1881.21$

$v = 1881.21\,\text{m/ min}$

d. Distancia que recorre en $t = 9.8$ min:

$$s = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$$

$$s = f(t) = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$$

$$f(9.8) = 144(9.8)^2 - \frac{(9.8)^4}{4} + 100 = 13\,829.76 - 2305.67 + 100$$

$$= 11\,624 \text{ m}$$

El móvil recorre 19 844 metros en 15 minutos; a los 9.8 minutos alcanza su máxima velocidad de 1 881.25 m/min, habiendo recorrido 11 624 metros.

Problema 2

Una maquiladora puede vender 1000 aparatos por mes a \$5.00 cada uno; si acepta bajar el precio unitario en dos centavos podrá vender 10 piezas más. Calcula cuántas piezas se deben vender para obtener la utilidad máxima y cuál sería el ingreso al venderlas.

Datos:

$1000 + x$ Número de unidades por vender.

$5 - 0.02\left(\dfrac{x}{10}\right) = 5 - 0.002x$ Precio de cada unidad.

Solución:

a. El ingreso I es igual al número de unidades por el precio unitario:

$I = (1000 + x)(5 - 0.002x)$

$I = 5000 + 5x - 2x - 0.002x^2$

$I = 5000 + 3x - 0.002x^2$

b. Calculamos $f'(x)$:

$$I = f'(x) = 3 - 0.004x$$

c. El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces.

$$3 - 0.004x = 0$$

$$-0.004x = -3$$

$$x = \frac{3}{0.004}$$

$$x = 750$$

Análisis para $x = 750$ en

$$f'(x) = 3 - 0.004x$$

Para un valor un poco menor, sea $x = 700$

$$f'(700) = 3 - 0.004(700) = 3 - 2.800 = 0.200 \qquad \text{Signo } (+)$$

Con un valor un poco mayor, sea $x = 800$

$$f'(800) = 3 - 0.004(800) = 3 - 3.200 = -200 \qquad \text{Signo } (-)$$

Como pasa de positivo a negativo concluimos que hay un máximo en $x = 750$.

El ingreso es máximo si se venden 1000 + 750 = 1750 piezas a \$3.50 cada una; se obtiene un ingreso de \$6 125.00 pesos.

Problema 3

Un fabricante, de acuerdo con sus registros de producción, considera que el costo de manufactura de unos radios de pilas depende del número de unidades fabricadas según la función $c = 10\,000 + 100x + 0.01x^2$. Calcula la cantidad de radios por fabricar para que el costo de cada unidad sea el mínimo.

Datos:

c costo de cada radio.

x número de piezas por fabricar.

$c = 10\,000 + 100x + 0.01x^2$ función

Solución:

a. El costo medio por unidad se obtiene dividiendo el costo total entre el número de unidades por fabricar:

$$c = \frac{10\,000 + 100x + 0.01x^2}{x} = \frac{10\,000}{x} + 100 + 0.01x$$

b. Calculamos $f'(x)$:

$$c=\frac{10\,000}{x}+100+0.01x \qquad \textbf{(1)}$$

$$f'(x)=-\frac{10\,000}{x^2}+0.01$$

c. El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$-\frac{10\,000}{x^2}+0.01=0$$

$$-\frac{10\,000+0.01x^2}{x^2}=0$$

$$-10\,000+0.01x^2=x^2(0)=0$$

$$0.01x^2=10\,000$$

$$x^2=\frac{10\,000}{0.01}=1\,000\,000$$

$$x=\sqrt{1\,000\,000}$$

$$x=1000$$

Análisis para $x = 1000$ en

$$f'(x)=-\frac{10\,000}{x^2}+0.01$$

Para un valor un poco menor, sea $x = 900$:

$$f'(900)=-\frac{10\,000}{(900)^2}+0.01=-\frac{10\,000}{810\,000}+0.01$$

$$=-0.012+0.01=-0.002 \qquad \text{Signo } (-)$$

Nota: del resultado de -0.012 únicamente se tomaron dos cifras porque sólo interesa el signo final de la suma para un valor un poco mayor, sea $x = 1100$:

$$f'(1100)=-\frac{10\,000}{(1100)^2}+0.01=-\frac{10\,000}{1210\,000}+0.01$$

$$=-0.00826+0.01=0.0017 \qquad \text{Signo } (+)$$

Como pasa de negativo a positivo concluimos que hay un mínimo en $x = 1000$. El costo de cada radio lo obtenemos sustituyendo en **(1)**:

$$c=f(1000)=-\frac{10\,000}{1000}+100+0.01(1000)=120$$

Solución:

Se deben fabricar 1000 radios con un costo unitario de \$120.00.

Problema 4

Si diariamente se invierte para producir x número de piezas de automóvil la cantidad de $\$\left(\frac{x^2}{4}+35x+25\right)$ y si el precio de venta de cada artículo es de $\$\left(50-\frac{x}{2}\right)$ calcula cuál debe ser la producción diaria para obtener el mayor beneficio.

Datos:

$\frac{x^2}{4}+35x+25$	Costo total de la producción diaria.
x	Número de piezas por fabricar.
$50-\frac{x}{2}$	Precio de venta de cada artículo.

Solución:

a. La utilidad de vender x piezas diarias es de:

$$b=x\left(50-\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{4}+35x+25\right)$$

$$b=50x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x^2-35x-25=-\frac{3}{4}x^2+15x-25$$

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(x)$

$$b=-\frac{3}{4}x^2+15x-25$$

$$f'(x)=-\frac{6x}{4}+15=15-\frac{3x}{2}$$

c. El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$15-\frac{3x}{2}=0$$

$$-\frac{3x}{2}=-15$$

$$x=\frac{15^{(2)}}{3}$$

$$x=10$$

Análisis para $x = 10$:

$$f'(x) = 15 - \frac{3x}{2}$$

Para un valor un poco menor, sea $x = 8$:

$$f'(8) = 15 - \frac{3(8)}{2} = 3 \qquad \text{Signo } (+)$$

Para un valor un poco mayor, sea $x = 12$

$$f'(12) = 15 - \frac{3(12)}{2} = -3 \qquad \text{Signo } (-)$$

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $x = 10$.

Para obtener la mayor ganancia se deben producir diariamente 10 piezas.

En los problemas siguientes es necesario obtener la función antes de analizar si tiene un máximo o un mínimo

A. Con números

Problema 5

Calcula dos números cuya suma sea 125 y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Datos:

x	es uno de los números.
$125 - x$	el otro número.
$f = (125 - x)x^2$	función, deseamos que este producto sea máximo.

Solución:

a. Aplicamos el criterio de la segunda derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(x), f''(x)$

$$f = (125 - x)x^2$$

$$f'(x) = (125 - x)(2x) + x^2(-1) = 250x - 2x^2 - x^2 = 250x - 3x^2$$

$$f''(x) = 250 - 6x$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$$250x - 3x^2 = 0$$

$$x(250 - 3x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$250 - 3x = 0$$

$$-3x = -250$$

$$x = \frac{250}{3}$$

Evaluamos en $f''(x)$:

$f''(x) = 250 - 6x$

$f''(0) = 250 - 6(0) = 250$

$250 > 0$ Hay un mínimo pero nos interesa el máximo.

$$f''\left(\frac{250}{3}\right) = 250 - 6\left(\frac{250}{3}\right) = 250 - 2(250) = -250$$

$-250 < 0$ Hay máximo.

Solución:

Un número es $\frac{250}{3}$ y el otro es $125 - \frac{250}{3} = \frac{375-250}{3} = \frac{125}{3}$

Comprobación:

$$\frac{250}{3} + \frac{125}{3} = \frac{375}{3} = 125$$

Su producto es

$$\frac{125}{3}\left(\frac{250}{3}\right)^2 = \frac{7\,812\,500}{27}$$

Problema 6

Determina dos números cuyo producto sea de 288 y la suma del doble del primero más el segundo sea mínimo.

Datos:

x Primer número

y El otro número

Solución:

Obtenemos la función:

$2x + y$ **(1)** Ecuación de la suma mínima.

$xy = 288$ **(2)** Producto de los dos números.

Despejamos en **(2)**:

$$y = \frac{288}{x} \quad \textbf{(3)}$$

Sustituimos en **(1)** y obtenemos la primera derivada:

$$2x + \frac{288}{x}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 288}{x}$$

$$\begin{array}{l|l} u = 2x^2 + 288 & v = x \\ u' = 4x & v' = 1 \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{x(4x) - [2x^2 + 288](1)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 288}{x^2} = \frac{2x^2 - 288}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 288}{x^2}$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$$\frac{2x^2 - 288}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 288 = x^2(0) = 0$$

$$2x^2 = 288$$

$$x^2 = \frac{288}{2} = 144$$

$$x = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

Análisis para $x = 12$:

$$f'(x) = 2 - \frac{288}{x^2}$$

Con un valor un poco menor, sea $x = 10$:

$$f'(10) = 2 - \frac{288}{x^2} = 2 - \frac{288}{10^2} = 2 - 2.88 = -0.88 \qquad \text{Signo } (-)$$

un valor un poco mayor, sea $x = 13$:

$$f'(13) = 2 - \frac{288}{13^2} = 2 - \frac{288}{169} = 2 - 1.7 = 0.3 \qquad \text{Signo } (+)$$

Como pasa de negativo a positivo, concluimos que hay un mínimo en $x = 12$ y para calcular su valor sustituimos en **(3)**:

$$y = \frac{288}{x}$$

$$f(12) = \frac{288}{12} = 24$$

Como ya no es necesario, no analizamos la otra raíz $x = -12$.

Un número es 12 y el otro el 24.

Comprobación:

Con $x = 12$ y $y = 24$ sustituimos en **(1)** y en **(2)**:

En **(1)**:

$u = 2x + y$

$u = 2(12) + 24 = 48$

En **(2)**:

$xy = 288$

$12(24) = 288$

$288 = 288$

Problema 7

Determina dos números cuya suma sea 10 y el cuadrado de uno por el cubo del otro sea el producto máximo. Expresa el valor de éste.

x Primer número

y Segundo número

Solución:

Obtenemos la función:

$x + y = 10$ **(1)** Ecuación de la suma de los números.

$u = x^3 y^2$ **(2)** Producto de los dos números.

Despejando y de **(1)** y sustituyendo en **(2)** tenemos:

$u = x^3(10 - x)^2$ **(3)**

Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3(10-x)^2 \\
f'(x) &= x^3\left[-2(10-x)\right] + (10-x)^2(3x^2) \\
&= -2x^3(10-x) + 3x^2(100 - 20x + x^2) \\
&= -20x^3 + 2x^4 + 300x^2 - 60x^3 + 3x^4 \\
&= 5x^4 - 80x^3 + 300x^2
\end{aligned}$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$$\begin{aligned}
5x^4 - 80x^3 + 300x^2 &= 0 \\
5x^2(x^2 - 16x + 60) &= 0 \\
5x^2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{0}{5} = 0 \\
x_1 &= 0 \\
(x-10)(x-6) &= 0 \\
x - 10 &= 0 \\
x_2 &= 10 \\
x - 6 &= 0 \\
x_3 &= 6
\end{aligned}$$

Análisis para $x_2 = 10,\ \ x_3 = 6,\ \ x_1 = 0$

Para $x_2 = 10$

Con un valor un poco menor, sea $x = 9$

$$f'(x) = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$f'(9) = 5(9)^4 - 80(9)^3 + 300(9)^2$$

$$= 32\,805 - 58\,320 + 24\,300 = -1\,215 \qquad \text{Signo } (-)$$

Un valor un poco mayor, sea $x = 11$,

$$f'(11) = 5(11)^4 - 80(11)^3 + 300(11)^2$$

$$= 73\,205 - 106\,480 + 36\,300 = 3\,025 \qquad \text{Signo } (+)$$

Como pasa de negativo a positivo, concluimos que hay un mínimo en $x = 10$. Este resultado no nos interesa porque queremos obtener un máximo.

Para $x_3 = 6$:

Con un valor un poco menor, sea $x = 5$

$$f(x) = 5x^4 - 80x^3 + 300x^2$$

$$f'(5) = 5(5)^4 - 80(5)^3 + 300(5)^2$$

$$= 5(625) - 80(125) + 300(25)$$

$$= 3125\ - 10\,000 + 7\,500 = 625 \qquad \text{Signo } (+)$$

Un valor un poco mayor, sea $x = 7$

$$f'(7) = 5(7)^4 - 80(7)^3 + 300(7)^2$$

$$= 5(2\,401) - 80(343) + 300(49)$$

$$= 12\,005 - 27\,440 + 14\,700 = -735 \qquad \text{Signo } (-)$$

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $x = 6$.

Ya no es necesario analizar la otra raíz $x_1 = 0$ porque el problema ya se resolvió.

Uno de los números es 6 y sustituimos en **(1)** para obtener el otro número:

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

$$y = 10 - 6 = 4$$

Los números 6 y 4 cumplen las condiciones del problema. Para obtener su producto máximo sustituimos en **(3)**:

$$f(x) = x^3(10 - x)^2$$

$$f(6) = 6^3(10 - 6)^2 = 3\,456$$

Cuando $x = 6$ se obtiene un máximo igual a 3 456.

Problema 8

60 es la suma de un número y el triple de otro número. Calcula entre todos los números reales que satisfacen esta condición el par cuyo producto sea el máximo.

Datos:

x	Uno de los números.
y	El otro número.
$f = xy$	Producto cuyo valor sea el máximo **(1)**.

Observa que la función es de dos variables, por lo que recurrimos a los datos del problema donde se establece una relación de x en y, al señalar que:

$$x + 3y = 60 \qquad \textbf{(2)}$$

Despejamos y:

$$3y = 60 - x$$

$$y = \frac{60 - x}{3} = 20 - \frac{1}{3}x \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituimos en **(1)**:

$$f = xy$$

$$f = x\left(20 - \frac{1}{3}x\right) = 20x - \frac{1}{3}x^2$$

Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos:

$$f(x) = 20x - \frac{1}{3}x^2$$

$$f'(x) = 20 - \frac{2}{3}x$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$$20 - \frac{2}{3}x = 0$$

$$-\frac{2}{3}x = -20$$

$$x = \frac{20}{\frac{2}{3}}$$

$$x = 30$$

Análisis para $x = 30$:

para un valor un poco menor, sea $x = 29$

$$f'(x) = 20 - \frac{2}{3}x$$

$$f'(29) = 20 - \frac{2}{3}(29) = 20 - \frac{58}{3} = \frac{2}{3} \qquad \text{Signo } (+)$$

Para un valor un poco mayor, sea $x = 31$

$$f'(31) = 20 - \frac{2}{3}(31) = 20 - \frac{62}{3} = -\frac{2}{3} \qquad \text{Signo } (-)$$

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $x = 30$.

Para calcular el otro número sustituimos en **(3)**:

$$y = 20 - \frac{1}{3}x$$

$$y = 20 - \frac{1}{3}(30) = 10$$

Los números 30 y 10 cumplen las condiciones del problema.

B. Con áreas y volúmenes

En los problemas siguientes es necesario establecer la función y a continuación analizar sus propiedades. Para este proceso es necesario recordar algunas fórmulas de áreas y volúmenes *citadas en el libro de Matemáticas II Geometría y Trigonometría del autor*, ya que en algunos problemas estas expresiones serán las funciones por aplicar para obtener el resultado.

Área del triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$

Área del rectángulo: $A = bh$

Área del rombo: $A = \frac{Dd}{2}$

Círculo de radio r: $\text{Área} = \pi r^2$

Circunferencia: $2\pi r$

Sector circular: $\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\alpha$, donde α es el ángulo del centro medido en radianes.

Esfera de radio r: $\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Cilindro recto circular de radio de la base r, y altura h:

$\text{Volumen} = \pi r^2 h$, superficie lateral $= 2\pi rh$

Cono recto circular de radio de la base r, y altura h:

$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Superficie lateral $= \pi rL$ con $L = \sqrt{r^2 + h^2}$

Problema 9

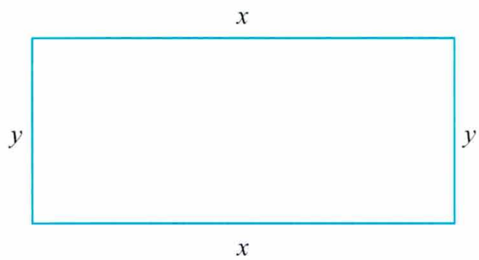
Calcular las dimensiones de un rectángulo con perímetro de 240 metros, de manera que el rectángulo sea el área máxima.

Datos:

Perímetro 240 m.

Área de un rectángulo $A = xy$ **(1)**

Solución:



Observa que la función es de dos variables, por lo que recurrimos a los datos del problema para encontrar una relación de x con y.

a. El perímetro de un rectángulo es $P = 2x + 2y$

El problema señala que $240 = 2x + 2y$

Simplificamos:

$$120 = x + y$$

Despejamos:

$$x = 120 - y \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituimos en **(1)**:

$$A = (120 - y)y = 120y - y^2$$

Ahora la función es de una sola variable y.

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(y)$

$$A = 120y - y^2$$

$$A' = f'(y) = 120 - 2y$$

El resultado de $f'(y)$ lo igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$$120 - 2y = 0$$

$$-2y = -120$$

$$y = 60$$

Análisis

Para un valor un poco menor, sea $y = 50$:

$$f'(x) = 120 - 2y$$

$f'(50) = 120 - 2(50) = 120 - 100 = 20$ Signo (+)

Para un valor un poco mayor, sea $y = 70$:

$f'(70) = 120 - 2(70) = 120 - 140 = -20$ Signo (−)

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $y = 60$.

Calculamos las dimensiones del rectángulo en **(2)** y en **(1)**:

En **(2)**:

$x = 120 - y$

$x = 120 - 60 = 60$

$x = 60$

En **(1)**:

$A = xy$

$A = 60(60) = 3\ 600\,\text{m}^2$

El área máxima es de 3 600 m^2; las dimensiones del rectángulo son de 60 m por lado.

Comprobación:

60(4) = 240 m, que es el perímetro.

Observa lo que puede suceder si la solución se hace al azar (tanteo).

Entre otras varias soluciones podríamos tener:

Dimensiones ancho = 20 m, longitud 100 m.

$P = 2(20) + 2(100) = 240$ m; el perímetro cumple una condición del problema.

$A = 20(100) = 2\ 000$ m^2 no es el área máxima.

Otra solución errónea:

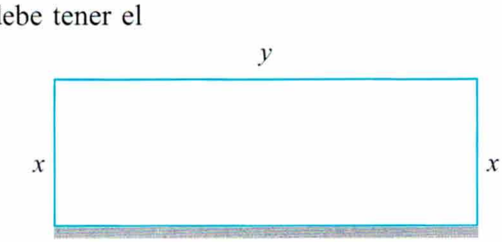
$A = 40(60) = 2\ 400$ m^2 mejoró el área.

$P = 2(40) + 2(60) = 80 + 120 = 200$ m

Aceptamos que para obtener el resultado correcto es necesario recurrir al cálculo diferencial.

Problema 10

En el costado de un terreno se encuentra una barda de piedra y se disponen de 600 metros de malla de acero de la misma altura que la barda; se desea hacer un corral rectangular utilizando el muro de piedra como uno de sus costados. Calcula las dimensiones que debe tener el corral para encerrar la mayor área posible.



Datos:

Área de un rectángulo, $A = xy$ **(1)**

x es el ancho

y es el largo, de donde $600 - 2x$ **(2)**

Solución:

a. $A = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$

$A(x) = 600x - 2x^2$

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(x)$:

$$A = 600x - 2x^2$$

$$A' = f'(x) = 600 - 4x$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$$600 - 4x = 0$$

$$-4x = -600$$

$$x = \frac{600}{4} = 150$$

Análisis

Para un valor un poco menor, sea $x = 140$:

$$f'(x) = 600 - 4x$$

$f'(140) = 600 - 4(140) = 600 - 560 = 40$ Signo (+)

Para un valor un poco mayor, sea $x = 160$:

$f'(160) = 600 - 4(160) = 600 - 640 = -40$ Signo (−)

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $x = 150$.

Calculamos las dimensiones del rectángulo en **(2)**

$$y = 600 - 2x$$

$$y = 600 - 2(150) = 600 - 300 = 300$$

$$y = 300$$

En **(1)**:

$$A = xy$$

$$A = 150(300) = 45\,000\,\text{m}^2$$

El área máxima es de 45 000 m^2, mientras que las dimensiones del rectángulo son de 150 m de ancho y 300 de largo.

Comprobación

150 + 150 + 300 = 600 m, que es el número de metros de malla que se dispone y se utilizan 300 m de la barda.

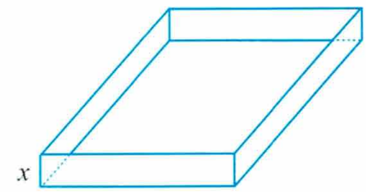
Problema 11

Se desea construir una caja cuadrada abierta por arriba y del mayor volumen posible, cortando las esquinas cuadradas iguales y doblando hacia arriba para formar las caras laterales. Si se dispone de una pieza de hojalata de 32 centímetros por lado, ¿cuanto debe medir el cuadrado que se recorta para obtener el volumen máximo?

Datos:

x Altura o profundidad de la caja.

$32 - 2x$ Longitud del lado del cuadrado que formará la base de la caja.



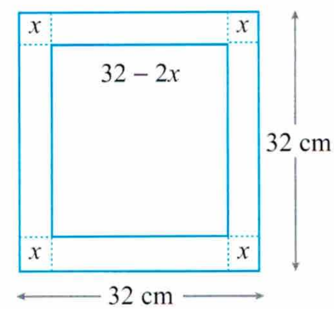
Solución:

a. Volumen = área de la base por la altura

$$v = (32 - 2x)^2(x) = (1\ 024 - 128x + 4x^2)(x)$$

$$v = 1\ 024x - 128x^2 + 4x^3$$

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(x)$:



$$v = 1\ 024x - 128x^2 + 4x^3$$

$$f'(x) = 1\ 024 - 256x + 12x^2$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$12x^2 - 256x + 1\ 024 = 0$$

$$(x - 16)(12x - 64) = 0$$

$$x - 16 = 0$$

$$x_1 = 16$$

$$12x - 64 = 0$$

$$12x = 64$$

$$x_2 = \frac{64}{12} = 5\frac{1}{3}$$

Análisis

En $x_1 = 16$.

Para un valor un poco menor, sea $x = 15$:

$$f'(x) = 1\ 024 - 256x + 12x^2$$

$$f'(15) = 1\ 024 - 256(15) + 12(15)^2 = 1\ 024 - 3\ 840 + 2\ 700$$

$$= -116 \qquad \text{Signo } (-)$$

Para un valor un poco mayor, sea $x = 17$:

$$f'(17) = 1\ 024 - 256(17) + 12(17)^2 = 1\ 024 - 4\ 352 + 3\ 468$$

$$= 140 \qquad \text{Signo } (+)$$

Como pasa de negativo a positivo, hay un mínimo en $x = 16$ pero a nosotros nos interesa el máximo. Continuamos el análisis.

En $x_2 = 5\frac{1}{3}$

Para un valor un poco menor, sea $x = 5$:

$$f'(5) = 1\,024 - 256(5) + 12(5)^2 = 1\,024 - 1\,280 + 300$$

$$= 44 \qquad \text{Signo } (+)$$

Para un valor un poco mayor, sea $x = 6$:

$$f'(6) = 1\,024 - 256(6) + 12(6)^2 = 1\,024 - 1\,536 + 432$$

$$= -80 \qquad \text{Signo } (-)$$

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $x = 5\frac{1}{3}$

La caja debe medir $5\frac{1}{3}$ cm de profundidad y la base $32 - 2\left(5\frac{1}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$ cm por lado para que tenga el volumen máximo.

Si la profundidad es menor de $5\frac{1}{3}$ cm el volumen será menos de su capacidad y si es más grande a $5\frac{1}{3}$ cm la base será pequeña y el volumen nuevamente menos de su máxima capacidad.

Observa: diariamente se construyen grandes cantidades de cajas, unas pequeñas, por ejemplo para empacar medicinas, y otras tan grandes como las de un contenedor; el cálculo diferencial nos permite obtener las medidas adecuadas.

Algo semejante sucede con las fracciones comunes (números racionales) que diariamente miles de obreros y artesanos usan para trabajar con clavos o tornillos de 1/4″, tubos de 1/2″, madera de una pulgada; efectivamente, por costumbre y porque inicialmente algunos productos procedían del extranjero, la unidad de medida es la pulgada pero es la aritmética la que facilita este conocimiento.

Problema 12

En una imprenta se decide que un volante debe incluir 24 centímetros cuadrados de texto, los márgenes superior e inferior deben tener 1.5 centímetros de ancho y los laterales un centímetro. Calcula las dimensiones mínimas de la hoja de cada impreso.

Datos:

$xy = 24$	Área impresa
$(x + 3)(y + 2)$	Área de la hoja impresa **(1)**

Solución:

a. El área impresa es de:

$$xy = 24$$

$$y = \frac{24}{x} \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituimos en **(1)**:

$$\text{Área} = (x+3)\left(\frac{24}{x}+2\right) = 30+2x+\frac{72}{x}$$

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el mínimo y calculamos $f'(x)$:

$$A = 30+2x+\frac{72}{x}$$

$$f'(x) = 2-\frac{72}{x^2}$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$2-\frac{72}{x^2}=0$$

$$\frac{2x^2-72}{x^2}=0$$

$$2x^2-72 = x^2(0) = 0$$

$$2x^2-72=0$$

$$x^2 = \frac{72}{2} = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -6$$

Análisis

En $x_1 = 6$:

Para un valor un poco menor, sea $x = 5$

$$f'(x) = 2-\frac{72}{x^2}$$

$$f'(5) = 2-\frac{72}{5^2} = -0.88 \qquad \text{Signo } (-)$$

Para un valor un poco mayor, sea $x = 7$:

$$f'(7) = 2-\frac{72}{7^2} = 2-\frac{72}{49} = \frac{26}{49} \qquad \text{Signo } (+)$$

Como pasa de negativo a positivo hay un mínimo en $x = 6$ que es el resultado que nos interesa, de ahí que ya no analizamos $x^2 = -6$.

Solución:

Sustituimos en **(2)**:

$$y=\frac{24}{6}=4$$

Las dimensiones mínimas de la tarjeta deben ser:

ancho $y+2$, con $y=4$ queda $2+4=6$ cm;

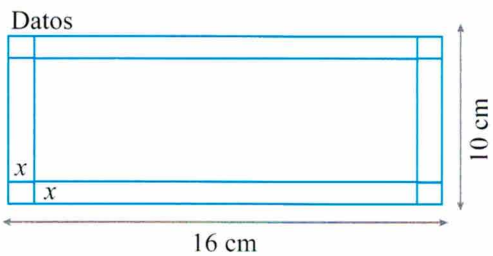
largo $x+3$, con $x=6$ resulta $6+3=9$ cm.

Comprobación:

La parte impresa de la tarjeta es de $4(6)=24\text{ cm}^2$, como se pide en el problema.

Problema 13

Se quiere construir una caja rectangular sin tapa utilizando una lámina de plata de 16 por 10 centímetros. Calcula la altura de la caja para que tenga el mayor volumen posible con el material disponible.



Datos:

x	Altura o profundidad de la caja.
$16-2x$	Largo de la base.
$10-2x$	Ancho de la base.

Solución:

a. Volumen = área de la base por la altura:

$$v=(16-2x)(10-2x)(x)$$

$$v=4x^3-52x^2+160x$$

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $f'(x)$:

$$v=4x^3-52x^2+160x$$

$$f'(x)=12x^2-104x+160$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$12x^2-104x+160=0$$

Simplificamos:

$$4(3x^2-26x+40)=0$$

$$3x^2-26x+40=0$$

$$(x-2)(3x-20)=0$$

$$x-2=0$$

$x_1 = 2$

$3x - 20 = 0$

$x_2 = \frac{20}{3}$

Análisis

En $x_1 = 2$.

Para un valor un poco menor, sea $x = 1$:

$f'(x) = 12x^2 - 104x + 160$

$f'(1) = 12(1)^2 - 104(1) + 160 = 68$ Signo (+)

Para un valor un poco mayor, sea $x = 3$:

$f'(3) = 12(3)^2 - 104(3) + 160 = -44$ Signo (–)

Como pasa de positivo a negativo, concluimos que hay un máximo en $x = 2$. Ya no es necesario analizar $x_2 = \frac{20}{3}$.

La altura es de 2 cm, el largo de 16 – 2(2) = 12 cm, la anchura de 10 – 2(2) = 6 cm y el volumen de 12(6) (2) = 144 cm^3.

Problema 14

Se quiere construir un recipiente cilíndrico, sin tapa, de base circular y de 64 centímetros cúbicos de volumen. Calcula las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal sea mínima.

Datos:

64 cm^3 Volumen del cilindro

Las fórmulas para calcular en un cilindro son:

Volumen	$v = \pi r^2 h$
Área lateral	$Al = 2\pi rh$
Área total	$At = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (con base y tapa)
Área total	$At = 2\pi rh + \pi r^2$ (con base sin tapa) **(1)**

En donde:

v	Volumen
r	Radio de la base
h	Altura
At	Área total del cilindro (sin tapa)

Solución:

$$v = \pi r^2 h$$

$$64 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{64}{\pi r^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Con el valor de h sustituimos en **(1)**:

$$At = 2\pi r h + \pi r^2$$

$$At = 2\pi r \frac{64}{\pi r^2} + \pi r^2$$

$$At = \frac{128}{r} + \pi r^2$$

Por comodidad escribimos $At = A$ en la expresión anterior.

a. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el mínimo y calculamos $f'(r)$:

$$A = \frac{128}{r} + \pi r^2$$

$$A' = f'(r) = -\frac{128}{r^2} + 2\pi r = \frac{-128 + 2\pi r^3}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 128}{r^2}$$

El resultado de $f'(x)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$\frac{2\pi r^3 - 128}{r^2} = 0$$

$$2\pi r^3 - 128 = r^2(0) = 0$$

$$\pi r^3 = \frac{128}{2} = 64$$

$$r = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Análisis

Para un valor un poco menor, sea $r = 2$:

$$f'(r) = \frac{2\pi r^3 - 128}{r^2}$$

$$f'(2) = \frac{2\pi (2)^3 - 128}{2^2} = -19.4336 \qquad \text{Signo } (-)$$

Para un valor un poco mayor, sea $r = 3$:

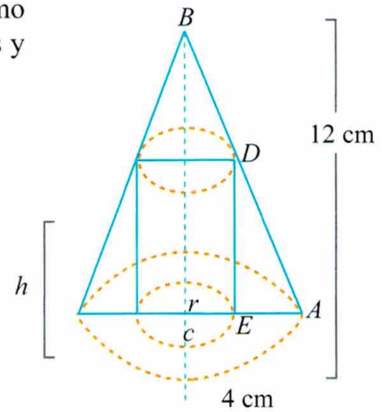
$$f'(3) = \frac{2\pi (3)^3 - 128}{3^2} = 4.6274 \qquad \text{Signo } (+)$$

Como pasa de negativo a positivo, concluimos que hay un mínimo en $r=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

El radio del cilindro debe ser de r, y la altura h para que tenga un volumen de 64 cm³. Observa que $r = h$ es la relación entre las dimensiones de un cilindro para que la cantidad de metal por usar en su manufactura sea mínima.

Problema 15

Calcular el radio y la altura del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono que tiene un radio de 4 centímetros y una altura de 12 centímetros.



Datos:

$\pi r^2 h$	Volumen del cilindro	**(1)**
12	Altura del cono	
4	Radio del cono	
$12-h$	Altura del cilindro	
$4-r$	Radio del cilindro	

Solución:

a. Los triángulos ADE y ABC son semejantes, de donde:

$$\frac{12}{4}=\frac{h}{4-r}$$

Despejamos h:

$$h=\frac{12(4-r)}{4}=3(4-r) \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituimos en **(1)**:

$$v=\pi r^2 h$$

$$v=3\pi r^2(4-r)=3\pi(4r^2-r^3)=12\pi r^2-3\pi r^3$$

b. Aplicamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo y calculamos $v'(r)$:

$$f=12\pi r^2-3\pi r^3$$

$$f'(r)=24\pi r-9\pi r^2$$

El resultado de $f'(r)$ lo igualamos a cero para obtener las raíces:

$$24\pi r-9\pi r^2=0$$

$$r(24\pi-9\pi r)=0$$

$$r_1=0$$

$$24\pi - 9\pi r = 0$$

$$-9\pi r = -24\pi$$

$$r_2 = \frac{24\pi}{9\pi} = \frac{8}{3}$$

Los números críticos son $r_1 = 0$ y $r_2 = \frac{8}{3}$. No tomamos $r_1 = 0$ porque no tiene sentido el radio igual a cero, que sería un punto.

Para obtener el máximo vamos a aplicar la segunda derivada y calculamos $f''(r)$:

$$f'(r) = 24\pi r - 9\pi r^2$$

$$f''(r) = 24\pi - 18\pi r = 3\pi(8 - 6r)$$

Sustituimos $\frac{8}{3}$ en $f''(r)$

$$f''\left(\frac{8}{3}\right) = 3\pi(8 - 6r)$$

$$= 3\pi\left[8 - 6\left(\frac{8}{3}\right)\right] = 3\pi(8 - 16) = -24\pi$$

Como $-24\pi < 0$ hay un máximo en $r = \frac{8}{3}$

El radio del cilindro es de $r = \frac{8}{3}$. La altura se obtiene sustituyendo en **(3)**:

$$h = 3(4 - r)$$

$$h = 3\left(4 - \frac{8}{3}\right) = 4$$

Si el problema incluyera obtener el volumen, los valores obtenidos de r y de h se sustituirían en **(1)**.

Interpretación de la derivada aplicada a la velocidad

Velocidad instantánea

En tu curso de aritmética y álgebra aprendiste que en cinemática se llama *móvil* a un cuerpo en movimiento. Un hombre que corre, un proyectil, un automóvil, un ciclista son otros móviles.

Cada punto o partícula del cuerpo que se mueve describe una trayectoria, mismos que vamos a considerar para un manejo más exacto del movimiento rectilíneo.

Se acostumbra considerar como origen del movimiento a un punto fijo a partir del cual hacia la derecha se le considera positivo (creciente) y a la izquierda negativo (decreciente).

La velocidad instantánea de una partícula que se mueve en una recta se describe con una ecuación que se cita en los problemas como una ley $s = f(t)$ donde s es la distancia y t el tiempo.

La velocidad instantánea o simplemente velocidad de una partícula es la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \textbf{(34)}$$

El resultado de v se expresa en m/seg.

La velocidad de un punto, de una partícula, en un instante cualquiera es la derivada del espacio respecto al tiempo.

Si $v > 0$ la partícula se mueve a la derecha en dirección creciente.

Si $v < 0$ la partícula se mueve a la izquierda en dirección decreciente.

Si $v = 0$ la partícula está en reposo en ese instante.

Problema 16

Si un punto se mueve sobre una recta según la ley $s = \frac{1}{2}t^3 - 4t$. Calcula su velocidad en un instante cualquiera y al cabo de 4 segundos.

Solución:

a. Velocidad en un instante cualquiera:

$$s = \frac{1}{2}t^3 - 4t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 4\right)\text{m/seg}$$

b. Velocidad cuando $t = 4$ seg:

$$v = f'(4) = \frac{3}{2}(4)^2 - 4 = 20 \text{ m/seg}$$

Aceleración instantánea

Si la velocidad en el movimiento rectilíneo la hemos definido como la variación del espacio (distancia) respecto al tiempo

$$v = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo $\frac{d^2s}{dt^2}$, que es la segunda derivada, se le llama aceleración y se define como la rapidez de variación de la velocidad respecto al tiempo, se expresa en m/seg^2:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad \textbf{(35)}$$

Si $a > 0$, la velocidad es creciente y la partícula está acelerando.

Si $a < 0$, la velocidad es decreciente y la partícula está frenando.

En el campo de la física la primera y segunda derivadas son importantes, especialmente en el estudio del movimiento.

Problema 17

La trayectoria de un punto en movimiento está dada por $s = t^3 - 8t^2 + 10t + 6$. Calcula su aceleración en un instante cualquiera y en 3 segundos.

Solución:

a. Para calcular la aceleración primero hay que obtener la velocidad instantánea:

$$s = t^3 - 8t^2 + 10t + 6$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 - 16t + 10) \text{ m/seg}$$

b. Aceleración en un instante cualquiera:

$$v = 3t^2 - 16t + 10$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (6t - 16) \text{ m/seg}^2$$

¡Recuerda!

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

c. Aceleración cuando $t = 3$ seg:

$$a = f''(3) = 6(3) - 16 = 2 \text{ m/seg}^2$$

Rapidez

La rapidez de una partícula en un tiempo t es el valor absoluto de su velocidad $[v(t)]$ y simplemente señala qué tan rápido se mueve, sin indicar la dirección del movimiento.

Espacio (distancia) recorrida en un tiempo *t*

La distancia recorrida por una partícula en un instante t se obtiene sustituyendo el valor de t en la ecuación de la ley $s = f(t)$ que regula su movimiento y se expresa en metros si el tiempo está en segundos.

Problema 18

La ley del movimiento de un cuerpo está dada por $s = t^3 - t + \frac{3}{2}$. Calcula la distancia recorrida en 2 segundos.

Solución:

a. Distancia recorrida en $t = 2$ seg:

$$s = f(2) = 2^3 - 2 + \frac{3}{2} = 8 - 2 + \frac{3}{2} = 7.5 \text{ m}$$

Instante en que la velocidad es igual a cero

Una partícula en movimiento rectilíneo no cambia su dirección sin antes llegar al reposo.

Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba continúa su movimiento hasta que su velocidad sea igual a cero; a partir de ese instante inicia su descenso.

Para calcular en qué instante la velocidad es cero, se iguala a cero la primera derivada y se obtienen las raíces (números críticos de s).

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Si por la naturaleza del problema es necesario calcular la distancia en que se detiene (llega al reposo) los valores de las raíces obtenidas se sustituyen en la ecuación de la ley $s = f(t)$ que regula su movimiento, el resultado se expresa en metros.

Problema 19

Dada la ley $s = t^3 - 12t^2 - \frac{1}{2}$ de una partícula en movimiento. Calcula en qué instante la velocidad es cero y la distancia recorrida hasta detenerse.

a. Velocidad instantánea.

$$s = t^3 - 12t^2 - \frac{1}{2}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 - 24t) \text{ m/seg}$$

b. Instante en que la velocidad es cero: igualamos a cero $f'(t)$ y obtenemos las raíces:

$$3t^2 - 24t = 0$$

$$3t(t-8) = 0$$

$$3t = 0$$

$$t_1 = \frac{0}{3} = 0 \text{ seg}$$

$$t - 8 = 0$$

$$t = 8 \text{ seg}$$

Iniciado el movimiento se detiene a los 8 seg.

c. Distancia recorrida por la partícula hasta detenerse:

$$s = f(t) = t^3 - 12t^2 - \frac{1}{2}$$

$$f(8) = 8^3 - 12(8)^2 - \frac{1}{2} = 512 - 768 - \frac{1}{2} = -\frac{513}{2} \text{ m}$$

El signo menos señala que en ese instante la partícula se movió a la izquierda de su origen y recorrió una distancia de

$$\frac{513}{2} = 256.5 \text{ m}$$

Problema 20

Calcula la velocidad, la aceleración instantánea y el espacio recorrido en dos segundos, del punto que se mueve rectilíneamente según la ley $s = t^2 - 4t + 5$.

Solución:

a. Velocidad instantánea:

$$s = t^2 - 4t + 5$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (2\ \ -4) \text{ m/seg}$$

¡Recuerda!

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

b. Aceleración instantánea:

$$v = 2t - 4$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 2 \text{ m/seg}$$

c. Espacio (distancia) recorrido en 2 seg:

$$s = t^2 - 4t + 5$$

$$s = f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1 \text{ m}$$

Problema 21

Si una partícula con movimiento rectilíneo se desplaza según la ley $s = bt^3 + ct + d$, donde b, c y d son constantes, calcula la velocidad y la aceleración instantánea y la distancia recorrida en tres segundos.

Solución:

a. Velocidad instantánea:

$$s = bt^3 + ct + d$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (3bt^2 + c) \text{ m/seg}$$

b. Aceleración instantánea:

$$v = 3bt^2 + c$$

$$a = \frac{d^2v}{dt^2} = (6bt) \text{ m/seg}^2$$

c. Distancia recorrida en 3 segundos:

$$s = bt^3 + ct + d$$

$$s = f(3) = b(3)^3 + c(3) + d = (27b + 3c + d)m$$

Problema 22

En el problema siguiente calcula la aceleración según la ley que se cita, y en un tiempo t.

Ley $s = 5t^2 + 3t$

Solución:

a. Calculamos la velocidad y la aceleración:

$s = 5t^2 + 3t$ en $t = 1$ seg

$$v = \frac{ds}{dt} = (10t + 3) \text{ m/seg}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 10 \text{ m/seg}^2$$

b. La aceleración en un segundo es de 10 m/seg^2.

Instantes en que la aceleración deja de actuar

Para determinar en qué instante la aceleración deja de actuar, se iguala a cero la segunda derivada $f''(t)$ y se obtienen sus raíces, sus valores obtenidos se sustituyen en la ecuación de la ley $s = f(t)$ que regula su movimiento.

Es importante observar que hemos hecho la aceleración $a = 0$ ya que en ese punto deja de actuar la aceleración, y esto nos permite su análisis.

Problema 23

La ley $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$ regula el movimiento rectilíneo de un punto. Calcula su velocidad y aceleración en:

a. Un instante cualquiera.

b. Un segundo.

c. Rapidez en 2 segundos.

Solución:

a. Velocidad en un instante cualquiera:

$$s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2\right) \text{m/seg}$$

En un segundo, con $t = 1$:

$$v = \frac{3}{2}t^2 - 2$$

$$f'(1) = \frac{3}{2}(1)^2 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \text{ m/seg}$$

El signo menos indica que la partícula se mueve hacia la izquierda de su origen.

b. Aceleración en un instante cualquiera:

$$v = \frac{3}{2}t^2 - 2$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 3t \text{ m/seg}^2 \text{ en un instante}$$

En un segundo, con $t = 1$:

$$a = f''(1) = 3(1) = 3 \text{ m/seg}^2$$

c. Rapidez a los dos segundos:

$$v = \frac{3}{2}t^2 - 2$$

$$v = f'(2) = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4 \text{ m/seg}$$

El signo más indica que la partícula se mueve hacia la derecha de su origen.

Rapidez $v = |4|$ m/seg

Problema 24

Ley $s = \frac{1}{t} + t$. Calcular la aceleración en $t = 2$ seg

Solución:

a. Obtenemos la velocidad y la aceleración:

$$s = \frac{1}{t} + t$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{t(0) - 1(1)}{t^2} + 1 = \left(-\frac{1}{t^2} + 1\right) \text{m/seg}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{t^2(0) - 1(2t)}{t^4} + 0 = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3} \text{ m/seg}^2$$

b. Aceleración en $t = 2$ seg:

$$a = f''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4} \text{ m/seg}^2$$

Problema 25

Dada la ley $s = t^5 - 10t^2$ que regula el movimiento de una partícula calcula en qué instante la aceleración es cero.

Solución:

a. Calculamos la velocidad y la aceleración:

$$s = t^5 - 10t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (5t^4 - 20t) \text{ m/seg}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = (20t^3 - 20) \text{ m/seg}^2$$

b. Instante en que la aceleración es cero:

Igualamos a cero $f''(t)$ y obtenemos el valor de t (hacemos $a = 0$) y queda:

$$20t^3 - 20 = 0$$

$$20t^3 = 20$$

$$t^3 = \frac{20}{20}$$

$$t = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ seg}$$

Después de un segundo la partícula se detiene.

Problema 26

Los movimientos de dos partículas están dados por las ecuaciones $s_1 = 2t^2 + 4t - 4$ y $s_2 = t^3 - 5t^2 - 2$. Calcula en qué momento las dos partículas tienen la misma aceleración y determina la distancia recorrida de cada una en el instante que la igualan.

Solución:

a. Calculamos las velocidades y las aceleraciones:

$s_1 = 2t^2 + 4t - 4$	$s_2 = t^3 - 5t^2 - 2$
$v_1 = \frac{ds}{dt} = (4t + 4)$ m/seg	$v_2 = (3t^2 - 10t)$ m/seg
$a_1 = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$ m/seg^2	$a_2 = (6t - 10)$ m/seg^2

b. Igualamos las dos aceleraciones:

$$6t - 10 = 4$$

$$6t = 4 + 10$$

$$t = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ seg}$$

En $t = \frac{7}{3}$ seg las dos aceleraciones son iguales.

c. Distancia recorrida por cada partícula en $\frac{7}{3}$ seg:

$$s_1 = 2t^2 + 4t - 4$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = 2\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{7}{3}\right) - 4$$

$$= \frac{98}{9} + \frac{28}{3} - 4$$

$$= \frac{98 + 84 - 36}{9} = 16\frac{2}{9}\text{ m}$$

$$s_2 = t^3 - 5t^2 - 2$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2$$

$$= \frac{343}{27} - \frac{245}{9} - 2$$

$$= \frac{343 - 735 - 54}{27}$$

$$= -\frac{446}{27} = -16\frac{14}{27}$$

La partícula s_1 recorre $16\frac{2}{9}$ m y la s_2 recorre $-16\frac{14}{27}$ m para que sus aceleraciones sean iguales.

Intervalos en que la velocidad es creciente o decreciente

Para determinar los intervalos en que la partícula se mueve hacia la derecha y en cuáles hacia la izquierda es necesario analizar su comportamiento en un entorno a los valores de los puntos en que se detiene.

Problema 27

Dada la ley $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 3$ de una partícula que se desplaza en una recta horizontal, calcula los intervalos de tiempo en que se mueve hacia la derecha y en cuáles hacia la izquierda y los espacios recorridos antes de detenerse. Grafica.

a. Velocidad instantánea:

$$s = t^3 - 3t^2 - 9t + 3$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 - 6t - 9)\text{ m/seg}$$

b. Instante en que la velocidad es cero (hacemos $v = 0$). Igualamos a cero $f'(t)$ y obtenemos las raíces:

$$3t^2 - 6t - 9 = 0$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 3(t + 1)(t - 3) = 0$$

$$3(t + 1)(t - 3) = 0$$

$$(t+1)(t-3) = \frac{0}{3} = 0$$

$$(t + 1)(t - 3) = 0$$

$(t + 1) = 0$

$t_1 = -1$

$(t - 3) = 0$

$t_2 = 3$

c. Para facilitar el análisis del movimiento con las raíces $t = -1$ y $t = 3$ en que la velocidad es cero, construimos una tabla para determinar los intervalos en que se desplaza a la derecha o a la izquierda.

Operaciones para llenar la tabla:

$f'(t) = 3t^2 - 6t - 9$

$f'(-2) = 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 12 + 12 - 9 = 15$ Signo +

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) - 9 = 3 + 6 - 9 = 0$

$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) - 9 = 3 - 6 - 9 = -12$ Signo –

$f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) - 9 = 27 - 18 - 9 = 0$

$f'(4) = 3(4)^2 - 6(4) - 9 = 48 - 24 - 9 = 15$ Signo +

t	–2	–1	1	3	4
v	+	0	–	0	+

Conclusión:

La tabla muestra que el movimiento es de izquierda a derecha:

Si $t < -1$, v es positiva y el movimiento es hacia la derecha.

Si $-1 < t < 3$, v es negativa y el movimiento es hacia la izquierda.

Si $t > 3$, v es positiva y el movimiento es hacia la derecha.

Los movimientos hacia la derecha y hacia la izquierda están separados por instantes de velocidad igual a cero (reposo).

d. Los espacios (distancias) recorridos antes de detenerse los calculamos en $f(t)$ con $t = -1$ y $t = 3$:

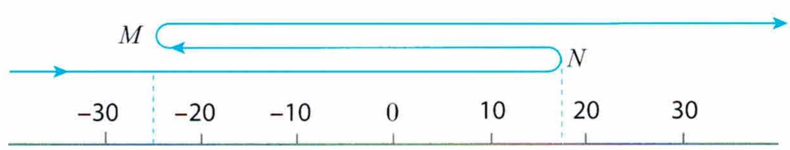
$s = f(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 3$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 3 = -1 - 3 + 9 + 3 = 8$ m

$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 3 = 27 - 27 - 27 + 3 = -24$ m

e. Gráfica:

El movimiento de la partícula es sobre una recta, los puntos M y N señalan dónde cambia de dirección. Se dibuja sobre la recta la representación gráfica.



Análisis de la aceleración

Si una partícula en un movimiento rectilíneo tiene una velocidad constante su aceleración es cero.

Cuando la aceleración es negativa la partícula esta frenando y si es positiva acelerando.

Problema 28

Un punto se mueve en forma rectilínea según la ley:

$s = 3t^3 - 16t^2 + 108t + 116$. Calcula:

La velocidad en 3 segundos.

La aceleración en 1 segundo y en 4 segundos.

Instante en que la aceleración deja de actuar sobre el movimiento.

La aceleración en 2 segundos.

Solución:

a. Velocidad y aceleración en un instante cualquiera:

$s = 3t^3 - 16t^2 + 108t + 116$

$$v = \frac{ds}{dt} = (9t^2 - 32t + 108) \text{ m/seg}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (18t - 32) \text{ m/seg}^2$$

b. Velocidad en $t = 3$ seg:

$v = f'(3) = 9(3)^2 - 32(3) + 108 = 93$ m/seg

c. Aceleración en $t = 1$ seg; y en $t = 4$ seg:

Como $a = \dfrac{dv}{dt} = (18t - 32)$ m/seg^2

$a = f''(1) = 18(1) - 32 = -14$ m/seg^2

La aceleración es negativa, está frenando.

$a = f''(4) = 18(4) - 32 = 40$ m/seg

La aceleración es positiva, está acelerando.

d. Instante en que la aceleración deja de actuar. Igualamos a cero la aceleración (igualamos a cero $f''(t)$:

$18t - 32 = 0$

$18t = 32$

$$t = \frac{32}{18} = 1\frac{7}{9} \text{ seg}$$

e. Aceleración en $t = 2$ seg:

$a = f''(2) = 18(2) - 32 = 4$ m/seg^2

Observa la precisión que se obtiene en el movimiento, en $t = 1$ seg la partícula está frenando, en $t = 1\frac{7}{9}$ seg deja de actuar la aceleración, y en $t = 2$ seg acelera.

Velocidad y aceleración (simultánea), en el movimiento rectilíneo de una partícula.

Cuando:

$a > 0$, la v aumenta.

$a < 0$, la v disminuye.

$a = 0$, entonces v no cambia.

Si:

$v \geq 0$ y $a > 0$, la rapidez aumenta.

$v \geq 0$ y $a < 0$, la rapidez disminuye.

$v \leq 0$ y $a > 0$, la rapidez disminuye.

$v \leq 0$ y $a < 0$, la rapidez aumenta.

a y v si tienen igual signo, la velocidad aumenta.

a y v si tienen signos diferentes, la velocidad disminuye.

Cada vez que el movimiento cambia de sentido (+) a (–) en el instante del cambio, la velocidad v es cero.

Problema 29

Una partícula se mueve en forma rectilínea según la ley:

$s = 3t^2 - t^3$

Calcula:

La velocidad instantánea.

La aceleración instantánea, y en un segundo.

Los valores de t cuando el espacio (distancia) es igual a cero; la velocidad igual a cero; y la aceleración también sea igual a cero.

Grafica.

Solución:

a. Velocidad instantánea:

$$s = 3t^2 - t^3$$

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t - 3t^2 \text{ m/seg}$$

¡Recuerda!

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

b. Aceleración instantánea y en $t = 1$ seg:

$v = 6t - 3t^2$

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=6-6t \text{ m/seg}^2$$

$a = f''(1) = 6 - 6(1) = 0$ m/seg^2

c. Instantes en que $s = 0$ (espacio igual a cero):

$3t^2 - t^3 = 0$

$t^2(3 - t) = 0$

$t^2 = 0$

$t_1 = \sqrt{0} = 0$

$3 - t = 0$

$-t = -3$

$t_2 = 3$

Los instantes en que el espacio es igual a cero son $t_1 = 0$ seg, y $t_2 = 3$ seg.

d. Instantes en que $v = 0$ (velocidad igual a cero):

$6t - 3t^2 = 0$

$3t(2 - t) = 0$

$$t_1=\frac{0}{3}=0$$

$2 - t = 0$

$-t = -2$

$t^2 = 2$

Los instantes en que la velocidad es igual a cero son $t_1 = 0$ seg y $t_2 = 2$ seg.

e. Instantes en que la $a = 0$ (aceleración igual a cero):

$6-6t=0$

$-6t=0-6$

$$-t=-\frac{6}{6}=-1$$

$t=1$ seg

Instante en que la aceleración es igual a cero es $t = 1$ seg.

f. Para facilitar el análisis del movimiento construimos una tabla para determinar los intervalos que se desplazan a la derecha o a la izquierda.

En $t = 0$:

La aceleración $f''(0) = 6 - 6t = 6 - 6(0) = 6$ m/seg^2

La partícula está en el origen, la velocidad instantánea es cero y acelera a 6 m/seg^2.

En el intervalo $0 < t < 1$:

tomamos un valor para t entre 0 y 1, sea $\frac{1}{2}$ para el espacio, la velocidad y la aceleración:

$$f(t) = 3t^2 - t^3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{18-3}{24} = \frac{15}{4} \qquad \text{Signo } (+)$$

$$f'(t) = 6t - 3t^2$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \qquad \text{Signo } (+)$$

$$f''(t) = 6 - 6t$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 3 = 3 \qquad \text{Signo } (+)$$

Conclusión:

La partícula se mueve a la derecha del origen, la velocidad y la aceleración aumentan.

En $t = 1$:

para el espacio, la velocidad y la aceleración:

$$f(t) = 3t^2 - t^3$$

$$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 = 3 - 1 = 2 \qquad \text{Signo } (+)$$

$$f'(t) = 6t - 3t^2$$

$$f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3 \qquad \text{Signo } (+)$$

$$f''(t) = 6 - 6t$$

$$f''(1) = 6 - 6 = 0 \qquad \text{la aceleración no actúa.}$$

Conclusión:

La partícula está a 2 unidades a la derecha del origen, la velocidad no cambia de dirección, aumenta la rapidez, la aceleración dejó de actuar.

En el intervalo $1 \leq t < 2$:

para el espacio, la velocidad y la aceleración:

tomamos un valor para t entre 1 y 2 sea $\frac{3}{2}$:

$$f(t) = 3t^2 - t^3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{4} - \frac{27}{8} = \frac{54-27}{8} = \frac{27}{8} \qquad \text{Signo } (+)$$

$f'(t) = 6t - 3t^2$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right) - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{36-27}{4} = \frac{9}{4}$$ Signo (+)

$f'' = 6 - 6t$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - 6\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - 9 = -3$$ Signo (–)

Conclusión:

La partícula continúa moviéndose a la derecha del origen, la velocidad y la rapidez disminuyen ya que $\frac{9}{4} < 3$.

En $t = 2$:

para el espacio, la velocidad y la aceleración:

$f(t) = 3t^2 - t^3$

$f(2) = 3(2)^2 - (2)^3 = 12 - 8 = 4$ Signo (+)

$f'(t) = 6t - 3t^2$

$f'(2) = 6(2) - 3(2)^2 = 12 - 12 = 0$ La velocidad no actúa

$f''(t) = 6 - 6t$

$f''(2) = 6 - 12 = -6$ La aceleración está frenando.

Conclusión:

La partícula está a 4 unidades a la derecha del origen, el sentido de su movimiento cambia en ese punto de derecha a izquierda, la velocidad ha disminuido hasta detenerse ya que $0 < \frac{9}{4}$, la rapidez aumenta.

En el intervalo $2 < t < 3$:

para el espacio, la velocidad y la aceleración:

Tomamos un valor para t entre 2 y 3 sea $\frac{5}{2}$:

$f(t) = 3t^2 - t^3$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{75}{4} - \frac{125}{8} = \frac{150-125}{8} = \frac{25}{8}$$ Signo (+)

$f'(t) = 6t - 3t^2$

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 15 - \frac{75}{4} = \frac{60-75}{4} = -\frac{15}{4}$$ Signo (–)

$f''(t) = 6 - 6t$

$f'\left(\frac{5}{2}\right) = 6 - 6\left(\frac{5}{2}\right) = 6 - 15 = -9$ Signo (−)

Conclusión:

La partícula está a la derecha del origen, se mueve hacia la izquierda, la velocidad está disminuyendo y la rapidez aumenta.

En $t > 3$:

para el espacio, la velocidad y la aceleración:

tomamos un valor para t sea $t = 4$:

$f(t) = 3t^2 - t^3$

$f(4) = 3(4)^2 - (4)^3 = 48 - 64 = -16$ Signo (−)

$f'(t) = 6t - 3t^2$

$f'(4) = 6(4) - 3(4)^2 = 24 - 48 = -24$ Signo (−)

$f''(t) = 6 - 6t$

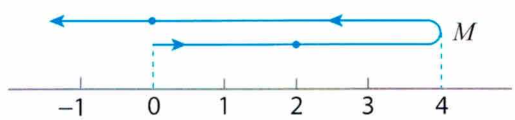
$f''(4) = 6 - 6(4) = 6 - 24 = -18$ Signo (−)

Conclusión:

La partícula está a la izquierda del origen, se está deteniendo.

g. Gráfica:

El movimiento de la partícula es sobre una recta, el punto M señala dónde cambia de dirección a la izquierda. Se dibuja sobre la recta su representación gráfica.



Problema 30

La ley del movimiento rectilíneo de un punto está dada por la ecuación $s = t^3 - t + \frac{3}{2}$. Calcula la velocidad y la aceleración en:

- Un instante cualquiera.
- En los instantes de $t = 2$ seg y de $t = 5$ seg.

Solución:

a. Obtenemos la velocidad y la aceleración:

$$s = t^3 - t + \frac{3}{2}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 - 1) \text{ m/seg}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t \text{ m/seg}^2$$

b. Velocidad y aceleración en $t = 2$ seg:

$$f'(t) = 3t^2 - 1$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 1 = 12 - 1 = 11 \text{ m/seg}$$

$$f''(t) = 6t$$

$$f''(2) = 6(2) = 12 \text{ m/seg}^2$$

c. Velocidad y aceleración en $t = 5$ seg:

$$f'(t) = 3t^2 - 1$$

$$f'(5) = 3(5)^2 - 1 = 75 - 1 = 74 \text{ m/seg}$$

$$f''(t) = 6t$$

$$f''(5) = 6(5) = 30 \text{ m/seg}^2$$

Problema 31

Si $s = 16t^2 - 64t + 94$ es la ley del movimiento de un punto, calcula el espacio recorrido y la aceleración cuando la velocidad se anula.

Solución:

a. Obtenemos la velocidad y la aceleración:

$$s = 16t^2 - 64t + 94$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (32t - 64) \text{ m/seg}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 32 \text{ m/seg}^2$$

b. Espacio recorrido cuando $v = 0$:

$$32t - 64 = 0$$

$$32t = 64$$

$$t = \frac{64}{32} = 2 \text{ seg}$$

$$f(t) = 16t^2 - 64\text{t} + 94$$

$$f(2) = 16(2)^2 - 64(2) + 94 = 64 - 128 + 94 = 30\text{m}$$

c. Aceleración cuando $v = 0$, es de 32 m/seg^2

Problema 32

Si la ley $s = 48t - t^3$ regula el movimiento de un punto, calcula el espacio recorrido cuando la velocidad es igual a cero; y la aceleración cuando la velocidad se anula para un valor positivo de t.

a. Obtenemos la velocidad y la aceleración:

$s = 48t - t^3$

$v = \dfrac{ds}{dt} = 48 - 3t^2$

$a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = -6t$

b. Espacio recorrido cuando $v = 0$:

$48 - 3t^2 = 0$

$-3t^2 = -48$

$t^2 = \dfrac{48}{3} = 16$

$t = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ seg

En $t = 4$:

$f(t) = 48\,t - t^3$

$f(4) = 48(4) - (4)^3 = 192 - 64 = 128\ m$ Se mueve hacia la derecha.

En $t = -4$:

$f(-4) = 48(-4) - (-4)^3 = -192 + 64 = -128\ m$ Se mueve hacia la izquierda.

c. Aceleración cuando $v = 0$ en $t = 4$:

En $t = 4$

$f''(t) = -6t$

$f''(4) = -6(4) = -24$ m/seg^2 está frenando.

Caída libre

Si se deja caer un objeto desde el reposo; o impulsado por una fuerza; o habiéndole lanzado hacia arriba después de haber llegado a su máxima altura principia a caer; en estos tres casos actúa la fuerza de gravedad y al movimiento resultante se le llama caída libre.

La ley (ecuación) para calcular la caída libre es:

$$s = s_0 + v_0 t - 16t^2 \qquad \textbf{(36)}$$

donde s es el espacio (distancia) y se mide en metros, s_0 es la altura, v_0 la velocidad y t el tiempo en segundos.

En un problema de caída libre se hacen las sustituciones necesarias con los datos disponibles y se resuelve la ecuación para obtener los valores de t.

Caída libre a partir del reposo

Problema 33

Se deja caer una piedra a partir del reposo desde una altura de 400 metros. Calcula en qué tiempo llega al suelo, y con qué velocidad.

Datos:

$s_0 = 400$ m

$v_0 = 0$ (parte del reposo)

Solución:

Sustituimos los valores disponibles en la ecuación:

$s = s_0 + v_0 t - 16t^2$

$s = 400 + 0 - 16t^2$

La piedra llega al suelo cuando $s = 0$:

$0 = 400 + 0 - 16t^2$

$400 - 16t^2 = 0$

$-16t^2 = -400$

$$t^2 = \frac{400}{16}$$

$t = \sqrt{25} = \pm 5$

Tomamos $t = 5$ seg pues el tiempo de caída debe ser positivo. Obtenemos la derivada de $s = 400 - 16t^2$:

$\mathrm{s} = 400 - 16t^2$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t$$

$f'(t) = -32t$

$f'(5) = -32(5) = -160$ m/seg

El signo menos indica que la piedra se mueve hacia abajo al llegar al suelo.

La piedra llega al suelo en 5 seg con una velocidad de 160 m/seg.

Caída libre desde una altura con un impulso

Problema 34

Se lanza desde un helicóptero, un cohete, en línea recta hacia abajo, desde una altura de 96 metros, con una velocidad inicial de 80 metros por segundo, calcula el tiempo que transcurre hasta que llega al suelo y con qué velocidad.

Datos:

$s_0 = 96$ m

$v_0 = -80$ m/seg — El signo menos indica que el cohete se mueve hacia abajo.

Solución:

Sustituimos los valores disponibles en la ecuación:

$s = s_0 + v_0 t - 16t^2$

$s = 96 - 80t - 16t^2$

El cohete llega al suelo cuando $s = 0$:

$0 = 96 - 80t - 16t^2$

$96 - 80t - 16t^2 = 0$

Dividimos entre -16 los dos miembros de la ecuación, para simplificar:

$t^2 + 5t - 6 = 0$

$(t + 6)(t - 1) = 0$

$t + 6 = 0$

$t_1 = -6$

$t - 1 = 0$

$t_2 = 1$

tomamos $t = 1$ seg pues el tiempo de caída debe ser positivo. Obtenemos la derivada de $s = 96 - 80t - 16t^2$ observa que se deriva la función original y no la expresión que simplificamos:

$s = 96 - 80t - 16t^2$

$$v = \frac{ds}{dt} = -80 - 32t$$

$f'(t) = -80 - 32t$

$f'(1) = -80 - 32(1) = -112$ m/seg — El signo menos indica que el cohete se mueve hacia abajo al llegar al suelo.

El cohete llega al suelo en un seg con una velocidad de 112 m/seg.

Caída libre de un objeto que alcanza su máxima altura

Problema 35

Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba con un impulso de 96 metros por segundo según la ley $s = 96t - 16t^2$. Calcula la velocidad después de un segundo, a partir de qué instante principia a caer, y cuántos metros alcanza a subir.

Datos:

96 = velocidad en m/seg.

$s = 96t - 16t^2$ ley que regula su movimiento.

Solución:

a. Velocidad en un instante cualquiera:

$$s = 96t - 16t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (96 - 32t) \text{ m/seg}$$

$$v = f'(1) = 96 - 32(1) = 64 \text{ m/seg}$$

b. Instante en que la velocidad es cero y comienza a caer. Igualamos a cero $f'(t)$:

$$0 = 96 - 32t$$

$$96 - 32t = 0$$

$$-32t = -96$$

$$t = \frac{96}{32} = 3 \text{ seg}$$

c. Altura máxima que alcanza el proyectil en $t = 3$ seg:

$$s = 96t - 16t^2$$

$$f(3) = 96(3) - 16(3)^2 = 288 - 144 = 144 \text{ m}$$

Transcurrido un segundo desde el lanzamiento la velocidad del proyectil es de 64 m/seg, principia a caer después de 3 seg de iniciado su movimiento y alcanza una altura de 144 m.

Problema 36

Según la ley $s = 64t - 8t^2$ un cohete se lanza verticalmente hacia arriba. Calcula:

- Su velocidad y posición después de 2 segundos.
- Altura máxima que alcanza.

Solución:

a. Velocidad en un instante cualquiera:

$$s = 64t - 8t^2$$

$$v = \frac{ds}{dt} = (64 - 16t) \text{ m/seg}$$

Velocidad a los 2 segundos:

$$v = f(2) = 64 - 16(2) = 32 \text{ m/seg}$$

Posición a los 2 segundos:

$s = 64t - 8t^2$

$f(2) = 64(2) - 8(2)^2 = 128 - 32 = 96$ m

b. Altura máxima que alcanza. Instante en que la velocidad es cero, igualamos a cero $f'(t)$:

$0 = 64 - 16t$

$64 - 16t = 0$

$-16t = -64$

$t = \dfrac{64}{16} = 4$ seg

c. Altura máxima que alcanza en $t = 4$ seg:

$s = 64t - 8t^2$

$f(4) = 64(4) - 8(4)^2 = 256 - 128 = 128$ m

Transcurridos dos segundos desde el lanzamiento su velocidad es de 32 m/seg, y se encuentra a 96 m de altura; y su altitud máxima es a los 128 m.

Movimiento circular

El movimiento circular es aquél descrito por una partícula a lo largo de la circunferencia.

En física se tiene:

θ = ángulo formado en el centro de la circunferencia, se mide en radianes

t = tiempo

w = velocidad angular

a = aceleración

La velocidad angular de una partícula, en un instante, corresponde a la variación del ángulo θ con respecto al tiempo t. Se expresa:

$$\text{Velocidad angular } w = \frac{d\theta}{dt}$$

La aceleración angular de una partícula se define como la variación de su velocidad angular con relación al tiempo. Se expresa:

$$a = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Si a es constante para todos los valores de t, la partícula se mueve con una aceleración angular constante.

Si $a = 0$ para todos los valores de t, la partícula se mueve con una velocidad angular constante.

Problema 37

Una partícula se mueve circularmente según la ley $\theta = 120t - 8t^2$ donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Calcula la velocidad angular y la aceleración transcurridos 3 segundos.

Solución:

a. Velocidad angular al cabo de 3 segundos:

Datos:

$t = 3$ seg

Ley $\theta = 120t - 8t^2$

$$\theta = 120t - 8t^2$$

$$w = \frac{d\theta}{dt} = 120 - 16t$$

Como $t = 3$:

$w = 120 - 16(3) = 120 - 48 = 72$ radianes por segundo.

$w = 72$ rad/seg

b. Aceleración:

$f'(t) = 120 - 16t$

$a = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -16$ radianes por segundo al cuadrado.

$a = -16$ rad/seg^2 por lo cual decimos que hay desaceleración.

Formulario

Fórmulas de geometría

Área A

Circunferencia o perímetro C

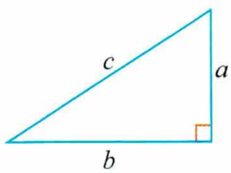
Volumen V

Área de superficie curva S

Altura h

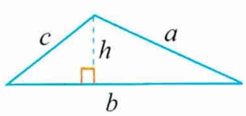
Radio r

Triángulo rectángulo



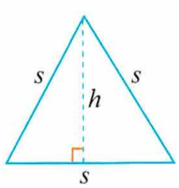
Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Triángulo



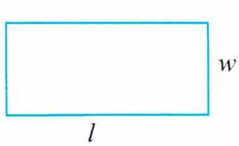
$A = \frac{1}{2} bh \qquad C = a + b + c$

Triángulo equilátero



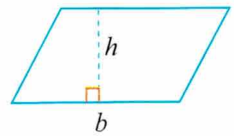
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} s \qquad A = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$

Rectángulo



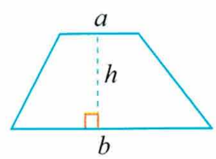
$A = lw \qquad C = 2l + 2w$

Paralelogramo



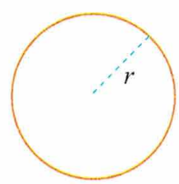
$A = bh$

Trapecio



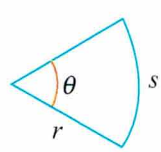
$A = \frac{1}{2}(a+b)h$

Círculo



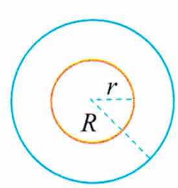
$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

Sector circular



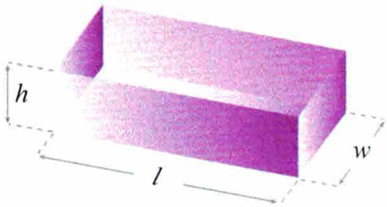
$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \qquad s = r\theta$

Corona



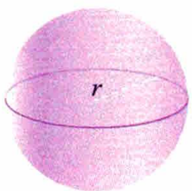
$A = \pi(R^2 - r^2)$

Paralelepípedo



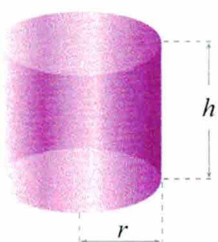
$V = lwh$ $\qquad$ $S = 2(hl + lw + hw)$

Esfera



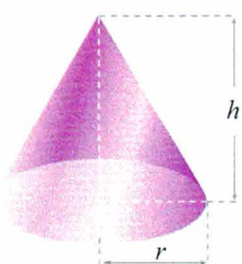
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad$ $S = 4\pi r^2$

Cilindro recto



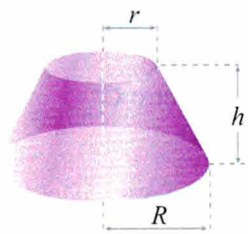
$V = \pi r^2 h$ $\qquad$ $S = 4\pi r^2 h$

Cono recto



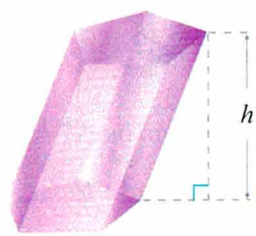
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\qquad$ $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

Cono truncado



$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$$

Prisma



$V = bh$ donde B es el área de la base

Identidades trigonométricas

Identidades recíprocas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades cocientes

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

Reglas básicas de derivación

1. $\dfrac{d}{dx}\left[cu\right]=cu'$

2. $\dfrac{d}{dx}\left[uv\right]=uv'+vu'$

3. $\dfrac{d}{dx}\left[c\right]=0$

4. $\dfrac{d}{dx}\left[x\right]=1$

5. $\dfrac{d}{dx}\left[\ln u\right]=\dfrac{u'}{u}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\log_a u\right]=\dfrac{u'}{(\ln a)u}$

7. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{sen} u\right]=(\cos u)u'$

8. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan u\right]=(\sec^2 u)u'$

9. $\dfrac{d}{dx}\left[\sec u\right]=(\sec u\tan u)u'$

10. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{arc\,sen} u\right]=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{arc\,tan} u\right]=\dfrac{u'}{1+u^2}$

12. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{arc\,sec} u\right]=\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

13. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{sen} hu\right]=(\cos hu)u'$

14. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan hu\right]=(\sec h^2 u)u'$

15. $\dfrac{d}{dx}\left[\sec hu\right]=-(\sec hu\tan hu)u'$

16. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{sen} h^{-1}u\right]=\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

17. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan h^{-1}u\right]=\dfrac{u'}{1-u^2}$

18. $\dfrac{d}{dx}\left[\sec h^{-1}u\right]=\dfrac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

19. $\dfrac{d}{dx}\left[u\pm v\right]=u'\pm v'$

20. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u}{v}\right]=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$

21. $\dfrac{d}{dx}\left[u^n\right]=nu^{n-1}u'$

22. $\dfrac{d}{dx}\left[|u|\right]=\dfrac{u}{|u|}(u'),\quad u\neq 0$

23. $\dfrac{d}{dx}\left[e^u\right]=e^u u'$

24. $\dfrac{d}{dx}\left[a^u\right]=(\ln a)\,a^u u'$

25. $\dfrac{d}{dx}\left[\cos u\right]=-(\operatorname{sen} u)$

26. $\dfrac{d}{dx}\left[\cot u\right]=-(\csc^2 u)u'$

27. $\dfrac{d}{dx}\left[\csc u\right]=-(\csc u\cot u)u'$

28. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{arc\,cos} u\right]=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

29. $\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arc}\cos u\right]=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

30. $\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arc}\cot u\right]=\frac{-u'}{1+u^2}$

31. $\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arc}\csc u\right]=\frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

32. $\frac{d}{dx}\left[\cos hu\right]=-(\operatorname{sen} hu)u'$

33. $\frac{d}{dx}\left[\cot hu\right]=-(\csc h^2 u)u'$

34. $\frac{d}{dx}\left[\csc hu\right]=-(\csc hu \cot hu)u'$

35. $\frac{d}{dx}\left[\cos h^{-1} u\right]=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

36. $\frac{d}{dx}\left[\cot h^{-1} u\right]=\frac{u'}{1-u^2}$

37. $\frac{d}{dx}\left[\csc h^{-1} u\right]=\frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$

En esta tercera edición de *Cálculo diferencial* se han incluido dos nuevas secciones de ejercicios: ¡*Aplícate*! y *Ejercicios de repaso*, en las cuales se invita al alumno a poner en práctica sus conocimientos teóricos para resolver problemas relacionados con las áreas de administración de proyectos, física, estadística y varias disciplinas más.

Ahora incluye un CD en el que los alumnos podrán resolver ejercicios, consultar los términos más importantes de cada capítulo y evaluar su avance en el manejo de fórmulas y planteamientos matemáticos.

Cuenta con un OLC (Online Learning Center) **www.mhhe.com/bachillerato/fuenlabradamat3e**. En este sitio los estudiantes podrán encontrar un gran número de actividades, proyectos, lecturas y preguntas adicionales. Por su parte, el profesor encontrará la resolución, paso a paso, de todos los problemas de final de capítulo, un banco de reactivos y presentaciones en PowerPoint.

También está disponible un manual para el profesor con estrategias de enseñanza, evaluaciones y las respuestas a todos los problemas del libro.

Conoce los títulos de esta serie:
- Aritmética y álgebra
- Geometría y trigonometría
- Geometría analítica
- **Cálculo diferencial**
- Cálculo integral
- Probabilidad y estadística

McGraw-Hill Interamericana

The McGraw-Hill Companies

ISBN-13: 978-970-10-6176-3
ISBN-10: 970-10-6176-4

EAN 9 789701 061763 00000

Visite nuestra página WEB
www.mcgraw-hill-educacion.com